HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 18. travnja 2019.

Zadatak 1.

Direktori dviju tvrtki nalaze se u točkama udaljenim 1000 kilometara. U n točaka na dužini između njih nalazi se po jedan matematičar. Svake sekunde u istom trenutku, svi matematičari se premještaju – svaki ide na polovište dužine koja spaja njega i njemu najbližu osobu (matematičara ili direktora). Ako takva osoba nije jedinstvena, po volji bira jednu od njih. Ako na taj način dva matematičara dođu u istu točku, mlađi od njih zauvijek odlazi.

Dokaži da će se, nakon konačno mnogo sekundi, svaki od preostalih matematičara moći rukovati s jednim od direktora. Matematičar se može rukovati s direktorom ako je od njega udaljen za najviše 1 metar.

Rješenje.

Označimo s $S_0 = \{0, x_1, \ldots, x_n, 1000\}$ skup početnih pozicija direktora $(0, 1000)$ i matematičara $(x_1, \ldots, x_n)$, $0 < x_1 < \cdots < x_n < 1000$. Uočimo da će se broj članova skupa S_0 smanjiti ako su neka dva broja jedan drugom najbliži. Oni će se tada spojiti u jedan broj koji je jednak njihovoj aritmetičkoj sredini. Kako u početku imamo samo konačno mnogo brojeva, jasno je da se takva situacija može dogoditi najviše konačno mnogo puta. To znači da se nakon nekog koraka više nikad neće dogoditi da dva broja budu jedan drugom najbliži susjedi.

Neka je to N-ti korak. Neka je $S_N = \{0, y_1, y_2, \ldots, y_m, 1000\}$ pri čemu je $0 < y_1 < \cdots < y_m < 1000$. U idućem koraku, svakom od brojeva je najbliži susjed ili lijevo ili desno od njega. Uočimo da ako je za y_i to desni susjed, tada za y_{i+1} to također mora biti desni susjed jer bi inače ta dva broja bili jedan drugom najbliži, a to se više ne može dogoditi. Slijedi da je za prvih t brojeva lijevi susjed najbliži, a za sve iduće desni. To je ekvivalentno s

$$y_1 - 0 < y_2 - y_1 < \cdots < y_t - y_{t-1} < y_{t+1} - y_t > y_{t+2} - y_{t+1} > \cdots > y_m - y_{m-1} > 1000 - y_m.$$

Nakon transformacije, brojevi će iznositi:

$$0 < \frac{y_1}{2} < \frac{y_1 + y_2}{2} < \cdots < \frac{y_{t-1} + y_t}{2} < \frac{y_{t+1} + y_{t+2}}{2} < \cdots < \frac{y_{m-1} + y_m}{2} < \frac{y_m + 1000}{2} < 1000.$$

Označimo te brojeve s $0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_m < 1000$. Pokažimo da za njihove razlike vrijedi isti uređaj kao i za razlike brojeva $0, y_1, \ldots, y_m, 1000$. Uočimo kako je dovoljno dokazati da je razlika $z_{t+1} - z_t$ najveća, jer će to značiti da je svim brojevima do z_t lijevi broj najbliži susjed, a ostalima desni, obzirom da ne možemo imati više spajanja.

Imamo $z_{t+1} - z_t = \frac{y_{t+1} - y_t + y_{t+2} - y_{t-1}}{2} > y_{t+1} - y_t$

Za $0 \leqslant i < t$ imamo $z_{i+1} - z_i = \frac{(y_{i+1} - y_i) + (y_i - y_{i-1})}{2} < y_{t+1} - y_t$, možemo uzeti $y_0 = 0$ kad je $i = 0$.

Za $t < i \leqslant m$ imamo $z_{i+1} - z_i = \frac{(y_{i+2} - y_{i+1}) + (y_{i+1} - y_i)}{2} < y_{t+1} - y_t$, možemo uzeti $z_{m+1} = 1000$ za $i = m$.

Ovime smo pokazali da će se uvijek prvih t brojeva micati u lijevo, a ostali u desno. Jasno je da će iz sekunde u sekundu prvih t brojeva padati, a da ostali rasti. Pokažimo da će tih prvih t brojeva nakon konačno mnogo koraka moći biti manji od 1. Jedan pristup je da promatramo njihovu sumu. Prije transformacije, ona je iznosila $y_1 + y_2 + \cdots + y_{t-1} + y_t$, a nakon $y_1 + y_2 + \cdots + y_{t-1} + \frac{y_t}{2}$. Dakle, suma se nakon transformacije smanji za pola vrijednosti najvećeg broja. Kad bi najveći broj uvijek bio veći od 1, suma bi uvijek padala za bar $\frac{1}{2}$ pa bi s vremenom postala negativna, što je nemoguće obzirom da su svi brojevi pozitivni. Analogno se pokaže kako će preostali brojevi nakon konačno mnogo koraka moći biti veći od 999. Time je tvrdnja dokazana.

Zadatak 2.

Kriptogramom prirodnog broja n zovemo uređenu n-torku $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ brojeva iz $\mathbb{N}_0$ takvu da vrijedi

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = n.$$

Neka je $\mathcal{K}_n$ skup svih kriptograma broja n. Za $a \in \mathcal{K}_n$ označimo sa $J(a)$ broj pojavljivanja broja 1 u kriptogramu a. Dokaži da vrijedi

$$\sum_{a \in \mathcal{K}_n} J(a) = \sum_{a \in \mathcal{K}_{n+1}} a_2.$$

Prvo rješenje.

Neka je, za $n \in \mathbb{N}$, $k_n = |\mathcal{K}_n|$, $j_n = \sum\limits_{a \in \mathcal{K}_n} J(a)$ i $d_n = \sum\limits_{a \in \mathcal{K}_{n+1}} a_2$. Trebamo pokazati da je $j_n = d_{n+1}$, za svaki prirodni broj n. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po n.

Vidimo da je

$$j_1 = 1 = d_2, \quad j_2 = 1 = d_3.$$

Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geqslant 2$ i $j_i = d_{i+1}$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Primijetimo najprije da je $d_{n+2} = k_n + d_n$. Naime, za svaki kriptogram a broja $n + 2$ u kojem je $a_2 > 0$, smanjimo a_2 za 1 i dobijemo kriptogram broja n. To znači da je d_{n+2} upravo jednak broju svih kriptograma broja n uvećanom za d_n.

Sada dokažimo i da je $j_{n+1} = k_n + d_n$, budući da vrijedi induktivna pretpostavka trebamo dokazati da je $j_{n+1} = k_n + j_{n-1}$.

Razdvojimo kriptograme broja $n + 1$ na dva disjunktna skupa, A u kojem su kriptogrami čiji je zadnji ne-nul element jednak 1 i skup B u kojem su kripogrami čiji je zadnji ne-nul element veći od 1.

Svi kriptogrami u skupu A su u bijekciji sa svim kriptogramima broja n. Naime, zadnji ne-nul element kriptograma iz A (koji je jednak 1) izbrišemo i dodamo 1 elementu ispred njega. Obratno, svakom kriptogramu broja n, smanjimo za 1 najveći ne-nul element i dodamo 1 elementu iza njega.

Preostaje dokazati da skup B sadrži ukupno j_{n-1} jedinica. Neka je $a \in B$ takav da je $a_i = 1$, za neki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Neka je $a_i = 0$ te povećajmo a_{i-1} za 1. Ukoliko je $i = 1$, samo neka je $a_1 = 0$. Nadalje, neka je $l > i$ najmanji takav da je $a_l > 0$, postoji jer 1 nije zadnji ne-nul element. Tada a_l smanjimo za 1 te a_{l-1} povećajmo za jedan. Primijetimo da na ovaj način dobijemo kriptogram broja $n - 1$ koji na mjestu $l - 1$ sadrži broj 1. Na ovaj način su jedinice iz skupa B u bijekciji s jedinicama iz skupa kriptograma broja $n - 1$.

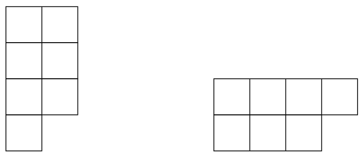
Konačno je $j_{n+1} = k_n + j_{n-1}$ i dokaz je gotov.

Drugo rješenje.

Za svaki kriptogram $a = (a_1, \ldots, a_n)$ možemo promatrati niz $b = (b_1, \ldots b_n)$ pri čemu je $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant 0$ te se bilo koji broj k (od 0 do n) pojavljuje a_k puta. Niz b ćemo zvati *particija* broja n.

Za particiju b možemo nacrtati pripadni *dijagram* koji u k-tom retku ima b_k kvadratića. Pomoću dijagrama lako definiramo *obrnutu particiju* koju dobivamo zamjenom redaka i stupaca dijagrama.

Na primjer, kriptogrami $a = (1, 3, 0, 0, 0, 0, 0)$ i $a' = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$ odgovaraju paticijama $b = (2, 2, 2, 1, 0, 0, 0)$ i $b' = (4, 3, 0, 0, 0, 0, 0)$ broja 7 koje su međusobno obrnute.



Particija ima točno jedan pribrojnik određene vrijednosti (tj. kriptogram ima broj 1) ako i samo ako njena obrnuta particija ima par pribrojnika koji su uzastopni brojevi (tj. obrnuti kriptogram ima par uzastopnih brojeva koji su različiti od nula).

Sada konstruiramo bijekciju između parova oblika

$$(\text{particija } b \text{ broja } n+1, \text{ pribrojnik } 2 \text{ u particiji } b)$$

i parova oblika

$$(\text{particija } b' \text{ broja } n, \text{ par uzastopnih pribrojnika u particiji } b').$$

Dovoljno je opisati što radimo nizu dvojki, a ostatak particije b samo prepisujem u particiju b'. Particiji $(2, 2, \ldots, 2)$ broja $n = 2k$ koja ima k dvojki pridružujemo sljedećih k particija broja $n - 1 = 2k - 1$

$$(2, ..., 2, 1), (2, ..., 2, 1), (3, 2, ..., 2), (4, 3, 2, ..., 2), \ldots, (k-1, k-2, 2), (k, k-1)$$

kojima su redom istaknuti par uzastopnih pribrojnika $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $\ldots$, $(k, k-1)$.

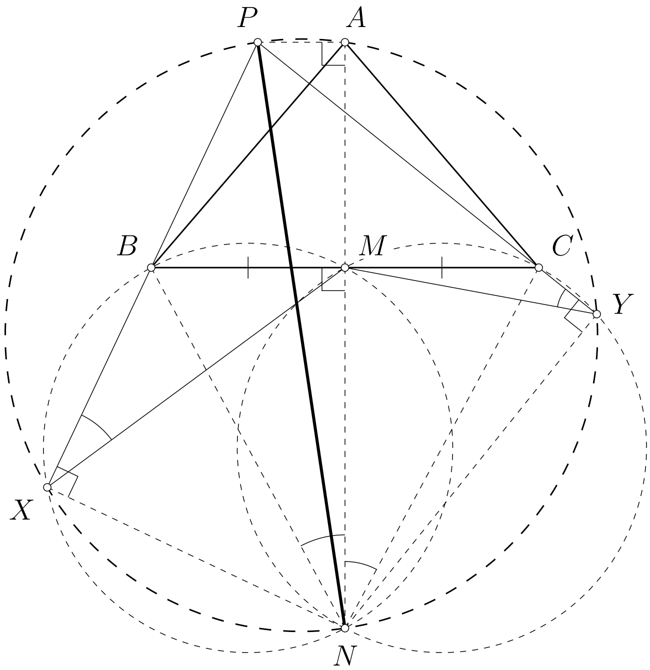
Inverzno pridruživanje sad možemo konstruirati tako da uzmemo uzastopni par $(j, j-1)$ particije b' i umjesto ta dva pribrojnika u b napišemo j dvojki (dok ostatak paticije b' ne mijenjamo).

Zadatak 3.

Dan je jednakokračan trokut ABC takav da je $|AB| = |AC|$. Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$ te neka je P točka različita od A takva da je $PA \parallel BC$. Točke X i Y nalaze se redom na polupravcima PB i PC, tako da je točka B između P i X, točka C između P i Y te vrijedi $\sphericalangle PXM = \sphericalangle PYM$. Dokaži da su točke A, P, X i Ykonciklične.

Rješenje.

Neka je N drugo sjecište kružnica opisanih trokutima BMX i CMY.



Tada vrijedi

$$\sphericalangle BNM = \sphericalangle BXM = \sphericalangle CYM = \sphericalangle CNM.$$

Promotrimo trokut BCN. Pokazali smo da je $\sphericalangle BNM = \sphericalangle CNM$, pa je pravac NM simetrala kuta pri vrhu N. Kako je M polovište dužine $\overline{BC}$, dužina $\overline{NM}$ je težišnica tog trokuta. Zaključujemo da je trokut BCN jednakokračan ($|BN| = |CN|$), pa je $NM \perp BC$, a to znači da su točke A, M i N kolinearne.

Uočimo da je $\sphericalangle PXN = \sphericalangle BXN = 180° - \sphericalangle BMN = 90°$, te analogno $\sphericalangle PYN = 90°$. Iz toga zaključujemo da točke P, X, N i Y leže na kružnici kojoj je dužina $\overline{PN}$ promjer.

Konačno, budući da su pravci AP i BC paralelni, te A, M i N kolinearne, zaključujemo da je $\sphericalangle PAN = 90°$, iz čega slijedi da i točka A leži na toj kružnici.

Zadatak 4.

Odredi sve prirodne brojeve n takve da je

$$\frac{n^{3n-2} - 3n + 1}{3n - 2}$$

cijeli broj.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da je $\dfrac{n^{3n-2}-3n+1}{3n-2}$ cijeli broj.

Tada $3n-2$ dijeli $n^{3n-2}-3n+1$, pa dijeli i $n^{3n-2}-1$. Dakle, vrijedi $n^{3n-2} \equiv 1 \pmod{3n-2}$.

Primijetimo da je n neparan (u suprotnom bi paran broj dijelio neparan, što je nemoguće).

Neka je $p > 2$ najmanji prost broj koji dijeli $3n-2$. Očito $p \nmid n$. Stoga je, prema malom Fermatovom teoremu, $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Također je i $n^{3n-2} \equiv 1 \pmod{p}$.

Uvedimo red od n modulo p - najmanji prirodan broj r takav da je $n^r \equiv 1 \pmod{p}$. Poznato je da je $n^e \equiv 1 \pmod{p}$ ako i samo ako r dijeli e.

Stoga r dijeli $p-1$ i $3n-2$, pa dijeli i njihovu mjeru. Međutim, kako je $p > 2$ najmanji prost broj koji dijeli $3n-2$, slijedi da je $M(p-1, 3n-2) = 1$, odnosno, red je $r = 1$, tj.

$$n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Iz $p \mid n-1$ i $p \mid 3n-2$ slijedi $p \mid 1$, tj. ne postoji takav prost broj p.

Jedini mogući n je $n = 1$ i provjerom vidimo da je 1 zaista rješenje.

Drugo rješenje.

Tvrdimo da je jedino rješenje $n = 1$.

Kao i u prvom rješenju, tražimo sve $n \in \mathbb{N}$ takve da je $n^{3n-2} \equiv 1 \pmod{3n-2}$. To znači da je mjera $(3n-2, n) = 1$, što je ekvivalentno s tim da je n neparan.

Primijetimo da je $3n \equiv 2 \pmod{3n-2}$, odnosno $3^{3n-2} \cdot n^{3n-2} \equiv 2^{3n-2} \pmod{3n-2}$, tj. $3^{3n-2} \equiv 2^{3n-2} \pmod{3n-2}$.

Pretpostavimo da postoji rješenje $n > 1$. Neka je p najmanji prosti djelitelj broja $3n-2 > 1$. Budući da je n neparan (tj. $2 \nmid 3n-2$ i $3 \nmid 3n-2$) zaključujemo da je $p \geqslant 5$. Tada je $3n-2 = p^a \cdot b$, za neke prirodne brojeve a i b, pri čemu znamo da su svi prosti djelitelji broja b veći od p.

Prema malom Fermatovom teoremu je $3^p \equiv 3 \pmod{p}$, pa je $3^{p^a} \equiv 3 \pmod{p}$ te analogno $2^{p^a} \equiv 2 \pmod{p}$, zato iz $3^{3n-2} \equiv 2^{3n-2} \pmod{3n-2}$ slijedi da je $3^{p^a \cdot b} \equiv 2^{p^a \cdot b} \pmod{p}$, odnosno

$$3^b \equiv 2^b \pmod{p}.$$

Također vrijedi i

$$3^{p-1} \equiv 1 \equiv 2^{p-1} \pmod{p},$$

a kako su brojevi $p-1$ i b relativno prosti (jer su svi prosti djelitelji broja b veći od p), postoje cijeli brojevi x i y takvi da je $(p-1)x + by = 1$.

Stoga zaključujemo da je

$$3 \equiv 2 \pmod{p},$$

što je kontradikcija.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 19. travnja 2019.

Zadatak 1.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi

$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b} \geqslant \frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}.$$

Rješenje.

Primijetimo najprije da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a+b+c=1$. Tada je

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b} \\
&=\frac{1+\sqrt{a}}{b+c}+\frac{1+\sqrt{b}}{c+a}+\frac{1+\sqrt{c}}{a+b} \\
&=\underbrace{\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}}_{A}+\underbrace{\frac{\sqrt{a}}{1-a}+\frac{\sqrt{b}}{1-b}+\frac{\sqrt{c}}{1-c}}_{B}.
\end{aligned}$$

Želimo dokazati da je $A+B \geqslant \dfrac{9+3\sqrt{3}}{2}$.

Korištenjem A–H nejednakosti slijedi

$$A \geqslant \frac{9}{3-(a+b+c)}=\frac{9}{2}.$$

Primjenom Cauchy–Schwarz nejednakosti slijedi

$$B \cdot \Big(a\sqrt{a}(1-a)+b\sqrt{b}(1-b)+c\sqrt{c}(1-c)\Big) \geqslant 1,$$

sotga je dovoljno dokazati da je

$$a\sqrt{a}(1-a)+b\sqrt{b}(1-b)+c\sqrt{c}(1-c) \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Korištenjem A–G nejednakosti dobivamo

$$\frac{a(1-a)^2}{4} \leqslant \left(\frac{a+\frac{1-a}{2}+\frac{1-a}{2}}{3}\right)^3=\frac{1}{27},$$

što znači da je $\sqrt{a}(1-a) \leqslant \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ i analogno $\sqrt{b}(1-b) \leqslant \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ te $\sqrt{c}(1-c) \leqslant \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Konačno,

$$a\sqrt{a}(1-a)+b\sqrt{b}(1-b)+c\sqrt{c}(1-c) \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}(a+b+c)=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Zadatak 2.

Prerez konačnog skupa točaka u ravnini je podjela tog skupa na disjunktne podskupove A i B, za koju postoji pravac koji ne prolazi niti jednom točkom promatranog skupa, takav da su sve točke skupa A s jedne strane, a sve točke skupa B s druge strane tog pravca. Odredi najveći mogući broj prereza skupa od n točaka u ravnini.

Rješenje.

Neka je broj prereza skupa od n točaka u ravnini jednak najviše a_n.

Promatrajmo skup $\mathcal{S}$ od $n+1$ točaka u ravnini i uočimo jednu točku na linearnoj ljusci tog skupa, nazovimo ju T. Primijetimo da se svaki prerez od $\mathcal{S}$ restringira na prerez od $\mathcal{S} \setminus \{T\}$ tako da točku T zanemarimo. Neka su $\{A, B\}$ i $\{C, D\}$ dva različita prereza skupa $\mathcal{S}$ koji se restringiraju na isti prerez skupa $\mathcal{S} \setminus \{T\}$. To znači da je $\{A \setminus \{T\}, B \setminus \{T\}\} = \{C \setminus \{T\}, D \setminus \{T\}\}$. Nadalje to znači da se, bez smanjenja općenitosti, skupovi A i C podudaraju, isto kao i skupovi B i D, do na točku T. No, to onda znači da za prerez $\{A \setminus \{T\}, B \setminus \{T\}\}$ skupa $\mathcal{S} \setminus \{T\}$ možemo uzeti pravac koji prolazi točkom T takav da su sve točke skupa $A \setminus \{T\}$ s jedne strane tog pravca, a sve točke skupa $B \setminus \{T\}$ s njegove druge strane.

Promotrimo sve pravce u ravnini koji prolaze točkom T i niti jednom točkom skupa $\mathcal{S} \setminus \{T\}$. Dva takva pravca mogu dati različite prereze skupa $\mathcal{S} \setminus \{T\}$ samo ako se između njih nalazi barem jedna točka skupa $\mathcal{S} \setminus \{T\}$. Dakle, različitih prereza skupa $\mathcal{S} \setminus \{T\}$ kojima odgovara neki pravac točkom T ima najviše n, tj. onoliko koliko je točaka u skupu $\mathcal{S} \setminus \{T\}$.

Konačno, vidimo da je

$$a_{n+1} \leqslant n + a_n \leqslant n + (n-1) + a_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 + a_1 = \binom{n+1}{2} + 1.$$

Dakle, skup od n točaka u ravnini može imati najviše $\binom{n}{2} + 1$ prereza. Taj broj se postiže za npr. pravilni n-terokut.

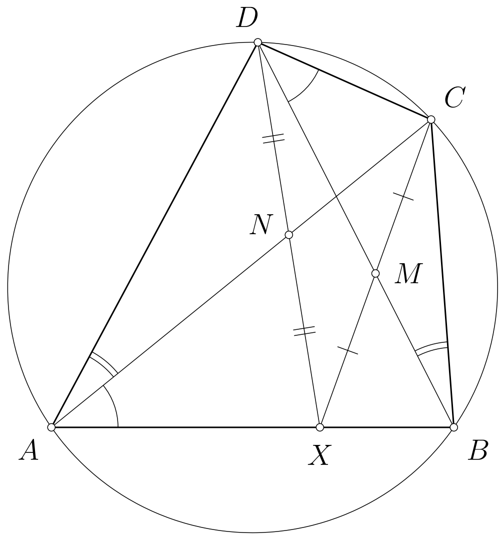
Zadatak 3.

Na stranici $\overline{AB}$ tetivnog četverokuta $ABCD$ postoji točka X sa svojstvom da dijagonala $\overline{BD}$ raspolavlja dužinu $\overline{CX}$, a dijagonala $\overline{AC}$ raspolavlja dužinu $\overline{DX}$.

Koliki je najmanji mogući omjer $|AB| : |CD|$ u takvom četverokutu?

Prvo rješenje.

Neka su M i N redom polovišta dužina $\overline{CX}$ i $\overline{DX}$, te $\alpha = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ i $\beta = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$.



Tada je $P(AXN) = P(ADN)$, pa je $|XA| \cdot |AN| \sin\alpha = |AD| \cdot |AN| \sin\beta$, iz čega slijedi

$$\frac{|XA|}{|AD|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{|DC|}{|BC|}.$$

Drugačije zapisano, vrijedi $\dfrac{|XA|}{|CD|} = \dfrac{|AD|}{|BC|}$. Analogno dobivamo $\dfrac{|XB|}{|CD|} = \dfrac{|BC|}{|AD|}$.

Sada slijedi da je

$$\frac{|XA|}{|CD|} + \frac{|XB|}{|CD|} = \frac{|AD|}{|BC|} + \frac{|BC|}{|AD|} \geqslant 2.$$

Jednakost se postiže ako je $ABCD$ jednakokračan trapez u kojem vrijedi $|AB| = 2|CD|$ i X je polovište dužine $\overline{AB}$.

Drugo rješenje.

Neka je M polovište dužine $\overline{CX}$, a N polovište dužine $\overline{DX}$. Dužina $\overline{MN}$ je tada srednjica trokuta XCD i vrijedi $MN \parallel CD$, pa je

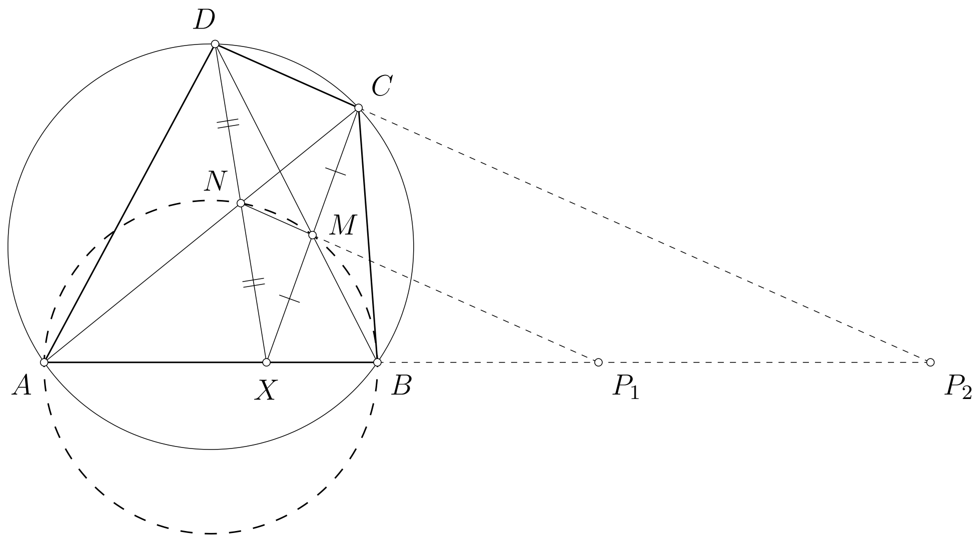
$$\begin{aligned}
\sphericalangle NMB &= \sphericalangle NMX + \sphericalangle XMB \\
&= \sphericalangle DCM + \sphericalangle CMD \\
&= 180^\circ - \sphericalangle BDC \\
&= 180^\circ - \sphericalangle BAN,
\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je četverokut $ABMN$ tetivan.

Bez smanjenja općenitosti možemo promatrati ove slučajeve:

a) $d(C, AB) < d(D, AB)$

   Neka su P_1 i P_2 redom sjecišta pravaca MN i CD s pravcem AB, te $|AB| = a$, $|BX| = ka$ $(0 < k < 1)$, $|MN| = d$, $|P_1M| = x$ i $|P_1B| = y$.



Budući da homotetija sa središtem u X i koeficijentom 2 točke N, M i P_1 redom preslikava u D, C i P_2, imamo $|CD| = 2d$, $|P_2C| = 2x$ te $|P_2P_1| = |P_1X| = ka + y$.

Primjenom poučka o potenciji točaka P_1 i P_2 redom na kružnice opisane četverokutima $ABMN$ i $ABCD$, te uočavanjem sličnosti trokuta BP_1M i BP_2D, dobivamo sustav:

$$y \cdot (y + a) = x \cdot (x + d) \tag{1}$$

$$(ka + 2y) \cdot ((ka + 2y) + a) = 2x \cdot (2x + 2d) \tag{2}$$

$$y : (ka + 2y) = x : (2x + 2d). \tag{3}$$

Iz (1) i (2) dobivamo $y = \dfrac{k(k+1)}{2(1-2k)}a$, odakle je i $k < \dfrac{1}{2}$.

Iz (3) je $x + d = \dfrac{2-k}{k+1}x$, pa uvrštavanjem svega dobivenog u (1) slijedi

$$x = \frac{(k+1)\sqrt{k(1-k)}}{2(1-2k)}a, \qquad \text{a zatim} \quad d = \frac{\sqrt{k(1-k)}}{2}a.$$

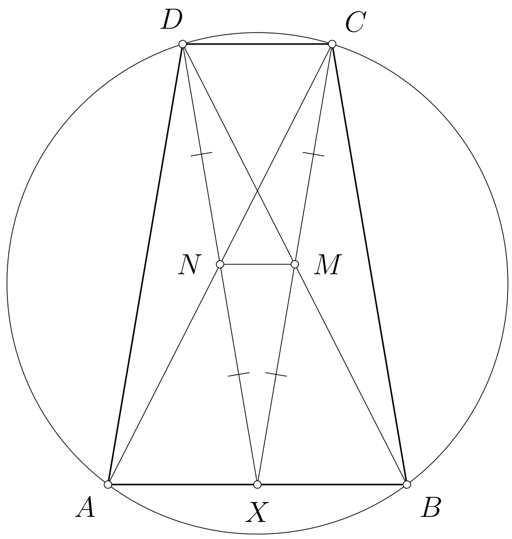
Stoga je

$$|AB| : |CD| = \frac{a}{2d} = \frac{1}{\sqrt{k(1-k)}} > \frac{1}{\frac{k+(1-k)}{2}} = 2,$$

pri čemu je nejednakost stroga jer zbog $k < \dfrac{1}{2}$ nije moguće $k = 1 - k$.

b) $d(C, AB) = d(D, AB)$

U ovom slučaju imamo $AB \parallel CD \parallel MN$ pa su četverokuti $ABCD$ i $ABMN$ jednakokračni trapezi, a X je polovište dužine $\overline{AB}$.



Trokuti CAX i CNM su slični, iz čega slijedi $|AX| = 2|NM| = |CD|$. Analogno je i $|BX| = |CD|$, pa je

$$|AB| : |CD| = (|AX| + |BX|) : |CD| = 2.$$

Konačno, najmanji mogući omjer $|AB| : |CD|$ je 2.

Zadatak 4.

Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ multiplikativna funkcija takva da je $f(4) = 4$ i vrijedi

$$f(m^2 + n^2) = f(m^2) + f(n^2) \qquad \text{za sve } m, n \in \mathbb{N}.$$

Dokaži da je $f(m^2) = m^2$ za sve $m \in \mathbb{N}$.

Za funkciju f kažemo da je *multiplikativna* ako za svaki izbor relativno prostih prirodnih brojeva m i n vrijedi $f(mn) = f(m)f(n)$.

Prvo rješenje.

Multiplikativnost funkcije f povlači $f(1) = 1$. Redom možemo dobiti i vrijednosti za neke druge brojeve: $f(2) = f(1) + f(1) = 2$, $f(5) = f(4) + f(1) = 5$, $f(20) = f(4)f(5) = 20$, $f(16) = f(20) - f(4) = 16$.

Dokažimo indukcijom da tvrdnja $f(n^2) = n^2$ vrijedi za sve prirodne brojeve n. Pretpostavimo da vrijedi za sve manje ili jednake od n, pa ćemo dokazati da vrijedi i za $n + 1$.

Ako je n paran broj, tada je $n + 1 = 2k + 1$, za neki prirodan k. Tada koristeći relaciju $2(k^2 + (k + 1)^2) = (2k + 1)^2 + 1$, te činjenicu da je $k^2 + (k + 1)^2$ neparan broj, dobivamo

$$f((2k+1)^2)+1 = f((2k+1)^2+1) = f(2(k^2+(k+1)^2)) = f(2)f(k^2+(k+1)^2) = 2(f(k^2)^2+f((k+1)^2),$$

odakle koristeći pretpostavku indukcije za k i $k+1$ izračunamo da je $f((n+1)^2) = f((2k+1)^2) = (2k + 1)^2 = (n + 1)^2$ (iskoristili smo i da je $k + 1 < 2k + 1$).

Ako je n neparan broj, tada je $n + 1 = 2k$. Dijelimo dokaz ovisno o parnosti broja k. Ako je k paran, tada je $k^2 + 1$ neparan, pa vrijedi

$$f((2k)^2) + 4 = f(4k^2 + 4) = 4f(k^2 + 1) = 4f(k^2) + 4,$$

odakle je korištenjem pretpostavke indukcije $f((n+1)^2) = f(2k)^2 = 4f(k^2) + 4 - 4 = 4k^2 = (n+1)^2$. Ako je k neparan, tada je $k^2 + 4$ neparan, pa slično

$$f((2k)^2) + 16 = f(4k^2 + 16) = 4f(k^2 + 4) = 4f(k^2) + 16,$$

odakle izračunamo da je $f((n+1)^2) = f((2k)^2) = 4k^2 = (n+1)^2$. Tvrdnja indukcije je dokazana, pa je dokazana i tvrdnja zadatka.

Drugo rješenje.

Ponovno, multiplikativnost funkcije f povlači $f(1) = 1$.

Cilj nam je iskoristiti Lagrangeov identitet:

$$(xz - yt)^2 + (xt + yz)^2 = (x^2 + y^2)(z^2 + t^2),$$

te preći na funkciju $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = f(n^2)$. Iz uvjeta zadatka vrijedi $g(2) = 4$. Za proizvoljne prirodne x, y, z, t t.d. $M(x^2 + y^2, z^2 + t^2) = 1$ te $xz - yt > 0$ vrijedi

$$f((xz - yt)^2) + f((xt + yz)^2) = f((x^2 + y^2)(z^2 + t^2)) = (f(x^2) + f(y^2))(f(z^2) + f(t^2)),$$

odnosno

$$g(xz - yt) + g(xt + yz) = (g(x) + g(y))(g(z) + g(t)).$$

Trebamo pokazati da je $g(n) = n^2$, za sve prirodne n.

Uvrstimo li u zadnju jednakost $(x, y, z, t) = (2n - 1, 2, 1, 1)$, dobivamo za sve $n \geqslant 2$

$$g(2n - 3) + g(2n + 1) = 2 \cdot (g(2n - 1) + 4), \tag{4}$$

a uvrstimo li $(x, y, z, t) = (2n, 1, 1, 1)$, dobivamo za sve $n \in \mathbb{N}$

$$g(2n - 1) + g(2n + 1) = 2 \cdot (g(2n) + 1). \tag{5}$$

Prvo dokažimo indukcijom da za sve prirodne brojeve n vrijedi $g(2n-1) = (2n-1)^2$. Za $n = 1$ znamo da tvrdnja vrijedi. Za $n = 2$ u (5) uvrstimo $n = 1$, te dobijemo

$$g(3) = 2 \cdot (g(2) + 1) - g(1) = 2 \cdot (4 + 1) - 1 = 9.$$

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve manje ili jednake n i dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Kako je $n \geqslant 3$, vrijedi $2n - 3 \geqslant 1$. Iz (4) izrazimo nepoznatu vrijednost, a za ostale iskoristimo pretpostavku indukcije:

$$g(2n+1) = 2\cdot(g(2n-1)+4) - g(2n-3) = 2\cdot(4n^2-4n+5) - (4n^2-12n+9) = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2,$$

čime je tvrdnja indukcije dokazana.

Sada još preostaje dokazati za sve n da vrijedi $g(2n) = (2n)^2$ što direktno slijedi iz (5):

$$g(2n) = \frac{1}{2}[g(2n-1) + g(2n+1) - 2] = \frac{1}{2}[(4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1) - 2] = 4n^2,$$

čime je dokaz gotov.

Treće rješenje.

Ponovno dobijemo $f(1)=1$, $f(2)=2$, te znamo $f(4)=4$.

Primijetimo da za proizvoljan k vrijedi

$$f(2^{2k})+f(2^{2k-2})=f(2^{2k-2}(2^2+1))=f(2^{2k-2})(f(4)+f(1))=5f(2^{2k-2}),$$

odakle je $f(2^{2k})=4f(2^{2k-2})$. Zato je

$$f(2^{2k})=2^2f(2^{2k-2})=2^4f(2^{2k-4})=\cdots=2^{2k}f(1)=2^{2k}.$$

Dokažimo sada tvrdnju iz zadatka indukcijom: prepostavimo da za sve prirodne brojeve manje ili jednake n vrijedi $f(n^2)=n^2$, te dokažimo da isto vrijedi i za $n+1$. Ako je $n+1$ paran broj, tada ga možemo zapisati u obliku $2^a\cdot b$, gdje je a prirodan te b neparan prirodan broj manji od $n+1$. Budući da su b i 2^a relativno prosti:

$$f((n+1)^2)=f(2^{2a}\cdot b^2)=f(2^{2a})f(b^2)=2^{2a}\cdot b^2=(n+1)^2,$$

gdje smo iskoristili pretpostavku indukcije i dokazanu tvrdnju za potencije broja 2. Ako je $n+1=q$ neparan broj, tada vrijedi

$$q^2+1=2\left[\left(\frac{q+1}{2}\right)^2+\left(\frac{q-1}{2}\right)^2\right],$$

tj. q^2+1 zapisan je kao dvostruki zbroj kvadrata dva cijela broja manja ili jednaka n. Kako je $M(2,\frac{q^2+1}{2})$, imamo

$$\begin{aligned}f\left(q^2\right)+1&=f(2)f\left[\left(\frac{q+1}{2}\right)^2+\left(\frac{q-1}{2}\right)^2\right]=2\left[f\left(\left(\frac{q+1}{2}\right)^2\right)+f\left(\left(\frac{q-1}{2}\right)^2\right)\right]\\&=2\left[\left(\frac{q+1}{2}\right)^2+\left(\frac{q-1}{2}\right)^2\right]=q^2+1,\end{aligned}$$

odnosno $f((n+1)^2)=(n+1)^2$. Na ovaj način, tvrdnja je dokazana indukcijom za sve prirodne n.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor IMO ekipe

Zagreb, 29. travnja 2019.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)f(y)=f(xy)+f\left(\frac{y}{x}\right),\quad \text{za sve } x,y\in\mathbb{R}^+.$$

($\mathbb{R}^+$ je oznaka za skup svih pozitivnih realnih brojeva.)

Rješenje.

Neka je g jedno rješenje. Tada je rješenje i svaka $f(x)=g(x)+Kx+\frac{L}{x}$. Neka je $0<a\neq 1$. Odaberimo K i L takve da je $f(1)=0$, $f(a)=0$. Oni sigurno postoje i dobiju se rješavanjem sustava dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama.

Uvrstimo $x=y=a$, ispadne $f(a^2)=0$. Zatim uvrstimo $x=a$, $y=a^2$, ispadne $f(a^3)=0$. Induktivno, možemo uvrstiti $x=a$, $y=a^{n-1}$, dobijamo je $f(a^n)=0$. Zato je $f(a^k)=0$ za sve $k\in\mathbb{N}$.

Uvrstimo $y=1$, $x=a^k$, koristeći prethodno dobijamo $f(a^{-k})=0$, pa imamo $f(a^k)=0$ za sve $k\in\mathbb{Z}$.

Uvrstimo u početnu $y=a^kx$, dobijamo $\left(x+\frac{1}{x}\right)f(a^kx)=f(a^kx^2)$. (1)

Uvrstimo u početnu $x:=a^kx$, $y=x$, dobijamo $\left(a^kx+\frac{1}{a^kx}\right)f(x)=f(a^kx^2)$. (2)

U (1) ubacimo $x:=ax$ i dobijamo $\left(ax+\frac{1}{ax}\right)f(a^{k+1}x)=f(a^{k+2}x^2)$. (3)

U (2) ubacimo $k:=k+2$ i dobijamo $\left(a^{k+2}x+\frac{1}{a^{k+2}x}\right)f(x)=f(a^{k+2}x^2)$. (4)

Izjednačavanjem (1) i (2) imamo (uz pretpostavku $f(x)\neq 0$):

$$\frac{f(a^kx)}{f(x)}=\frac{a^kx+a^{-k}x^{-1}}{x+x^{-1}}. \quad (5)$$

Izjednačavanjem (3) i (4) imamo (uz pretpostavku $f(x)\neq 0$):

$$\frac{f(a^{k+1}x)}{f(x)}=\frac{a^{k+2}kx+a^{-k-2}x^{-1}}{ax+a^{-1}x^{-1}}. \quad (6)$$

Sada u (5) stavimo $k:=k+1$ i izjednačimo (5) i (6) i sredimo:

$$a^{k+2}+\frac{1}{a^{k+2}}=a^k+\frac{1}{a^k}.$$

Dodatnim sređivanjem tog izraza dobijamo da je za sve $k\in\mathbb{N}$

$$a^{2k+2}(a^2-1)=(a^2-1),$$

iz čega je $a=\pm 1$, što je nemoguće. Zato je $f(x)=0$. Dakle, naše rješenje g je bilo oblika $g(x)=Kx+\frac{L}{x}$ i provjera pokazuje da svi takvi zadovoljavaju.

Zadatak 2.

Na ploči su zapisana dva prirodna broja. Dva igrača igraju igru naizmjence odigravajući poteze kojima mijenjaju brojeve na ploči.

Ako su na ploči u nekom trenutku brojevi A i B ($A \geqslant B$), igrač koji je na potezu odabire prirodni broj k takav da je $A - kB \geqslant 0$, briše broj A te umjesto njega zapisuje broj $A - kB$. Pobjeđuje igrač koji na ploču napiše broj 0.

Za koje sve vrijednosti omjera početna dva broja na ploči prvi igrač može pobijediti neovisno o igri drugog igrača?

Rješenje.

Neka je $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pozitivna nultočka od $t^2 - t - 1$. Prvi igrač može pobijediti neovisno o igri drugog igrača ako je omjer početnih brojeva u skupu

$$\left\langle 0, \frac{1}{\varphi} \right\rangle \cup \{1\} \cup \langle \varphi, +\infty \rangle .$$

Neka su M i m prirodni brojevi, takvi da je $M \geqslant m$. Tvrdimo da ako igrač koji je na potezu na ploči zatekne brojeve M i m pobjeđuje neovisno o igri drugog igrača ako i samo ako je $m = M$ ili $M > \varphi m$. Tvrdnja je očita za $m = M$, stoga pretpostavimo da je $m \neq M$.

Ako je $M < \varphi m$, onda mora proslijediti $(m, M - m) \neq (m, 0)$ i $m > \varphi(M - m)$. Stoga je dovoljno pokazati da igrač koji dobije par takav da je $M > \varphi m$ može pobijediti ili proslijediti par (m', M') s $m' < M' < \varphi m'$.

Igrač pobjeđuje ako dobije par takav da $m \mid M$. Stoga pretpostavimo da je $M > \varphi m$ i $M = qm + r, 0 < r < m$. Ako je $q \geqslant 2$, onda igrač može proslijediti (m, r), kao i $(m, m + r)$. Prosljeđuje (m, r) ako je to gubitnička pozicija (tj. $r < m < \varphi r$). Ako je pak $m > \varphi r$, onda prosljeđuje $(m, m + r)$, pa mu drugi igrač mora vratiti (m, r), što je pobjednička pozicija. Sad pretpostavljamo $q = 1$ i onda prosljeđuje (m, r). Tvrdimo da je $r \neq m < \varphi r$. Budući da je $m + r > \varphi m$, onda je $(\varphi - 1)m < r$, tj. $m < \varphi r$.

Dakle, prvi igrač u svakom potezu može ili pobijediti ili proslijediti par (m', M') takav da je $m' < M' < \varphi m'$.

Zadatak 3.

Neka je T točka unutar šiljastokutnog trokuta ABC i neka su A_1, B_1 i C_1 točke osnosimetrične točki T u odnosu na pravce BC, CA i AB, redom. Pravci A_1T, B_1T i C_1T sijeku kružnicu k opisanu trokutu $A_1B_1C_1$ ponovno u točkama A_2, B_2 i C_2, redom.

Dokaži da se pravci AA_2, BB_2, CC_2 sijeku u jednoj točki koja leži na kružnici k.

Rješenje.

Zadatak 4.

Dani su prirodan broj m i prost broj p takvi da je $p > m$. Dokaži da broj prirodnih brojeva n za koje je

$$m^2 + n^2 + p^2 - 2mn - 2mp - 2np$$

kvadrat nekog prirodnog broja ne ovisi o broju p.

Rješenje.

Neka je $m^2 + n^2 + p^2 - 2mn - 2mp - 2np = k^2$, za neki prirodni broj k, to znači da je

$$(m + p - n)^2 = m^2 + n^2 + p^2 - 2mn - 2mp - 2np + 4mp = k^2 + 4mp.$$

Dakle, $k^2 + 4mp$ je potpun kvadrat pa postoji prirodan broj l takav da je $(k + l)^2 = k^2 + 4mp$, odnosno $2kl + l^2 = 4mp$. To znači da je broj l paran pa postoji prirodni broj a takav da je $l = 2a$, što povlači da je $4ka + 4a^2 = 4mp$, odnosno $a(k + a) = mp$.

Kako je broj p prost i kako je $p > m$ zaključujemo da p dijeli $k + a$, odnosno da postoji prirodni broj b takav da je $k + a = bp$. Sada je

$$(bp + a)^2 = (k + 2a)^2 = (m + p - n)^2,$$

iz čega zaključujemo da je $n = p + m \pm (bp + a) = p + ab \pm (bp + a)$. Primijetimo da je

$$p + ab - (bp + a) = (1 - b)(p - a) \leqslant 0,$$

stoga je $n = p + ab + bp + a = p + m + a + bp$. Dakle, za svaki izbor djelitelja broja m dobijemo neki dobar broj n.

Pretpostavimo da su a i a' dva različita djelitelja od m i neka im je odgovarajući broj n isti, to znači da je

$$0 = (a + bp) - (a' + b'p) = (a - a') + p(b - b').$$

To, konačno znači da $p \mid a - a'$, što je nemoguće jer je $0 < |a - a'| < m < p$.

Dakle, brojeva n ima koliko ima djelitelja broja m, što ne ovisi o broju p.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor MEMO ekipe

Zagreb, 29. travnja 2019.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ takve da vrijedi

$$f\left(x^2\left(f(y)\right)^2\right) = \left(f(x)\right)^2 f(y), \quad \text{za sve } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

($\mathbb{Q}^+$ je oznaka za skup svih pozitivnih racionalnih brojeva.)

Prvo rješenje.

Uvrstimo $f(x)$ umjesto x u početnu jednadžbu i dobijemo

$$f\left(f(x)^2 f(y)^2\right) = f(f(x))^2 f(y).$$

Zamijenimo li uloge za x i y u gornjoj jednakosti, dobijemo

$$f(f(y))^2 f(x) = f\left(f(x)^2 f(y)^2\right) = f(f(x))^2 f(y),$$

odnosno

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{\left(f(f(x))\right)^2}{\left(f(f(y))\right)^2} = \frac{\left(f^2(x)\right)^2}{\left(f^2(y)\right)^2},$$

gdje $f^k(x)$ označava k-kratno djelovanje funkcije f.

Indukcijom se može pokazati da vrijedi

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{\left(f^n(x)\right)^{2^{n-1}}}{\left(f^n(y)\right)^{2^{n-1}}}$$

za sve prirodne n. Zaista, ako pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan n, u tu jednakost uvstimo $f(x)$ i $f(y)$ umjesto x i y redom i kvadriramo. Dobijemo

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{f(f(x))^2}{f(f(y))^2} = \frac{\left(f^{n+1}(x)\right)^{2^n}}{\left(f^n(y)\right)^{2^n}},$$

čime je tvrdnja indukcije dokazana.

Ovo znači da je broj $f(x)/f(y)$ 2^n-ta potencija nekog racionalnog broja, za svaki prirodan broj n. Jedini takav pozitivan racionalni broj je broj 1. Ovo vrijedi za proizvoljne x i y, što povlači da je funkcija konstantna. Uvrštavanjem u početnu jednakost vidimo da je jedina konstanta koja ju zadovoljava 1. Dakle, jedino rješenje je $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{Q}^+$.

Drugo rješenje.

Primijetimo da je $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{Q}^+$ rješenje jednadžbe. Pretpostavimo da postoji i neko drugo rješenje jednadžbe. Uvrstimo u početnu jednakost $(x, y) = (y/f(y^2), y^2)$ te dobivamo:

$$f\left(\frac{y}{f(y^2)}\right) = 1.$$

Uvrstimo $(x, y) = (x, y/f(y^2))$ i koristeći gornju jednakost dobivamo $f(x) = f(x^2)$. Sada za $(x, y) = (1, y)$ imamo $f(f(y))^2 = f(1)^2 f(y)$.

Jedini racionalni broj koji je potencija proizvoljno velikog prirodnog broja je 1. Kako to nije jedini element slike funkcije f, postoji najveći nenegativan cijeli broj n takav da postoji funkcija $g\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ takva da $f(x) = g(x)^{2^n}$.

Sada iz zadnje jednakosti imamo

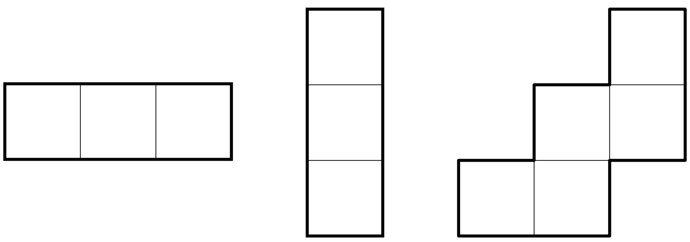
$$f(g(y))^{2^{n+1}} = f(g(y)^{2^n})^2 = f(f(y))^2 = f(y)f(1)^2 = g(y)^{2^n} g(1)^{2^{n+1}},$$

odakle zaključujemo $g(y) = (f(g(y))/g(1))^2$, dakle za sve y broj $g(y)$ je potpun kvadrat To je kontradikcija s maksimalnošću broja n.

Dakle, ne postoji nijedno drugo rješenje početne jednadžbe, jedino rješenje je $f(x) = 1$, za sve $x \in \mathbb{Q}^+$.

Zadatak 2.

Je li moguće ploču dimenzija 1000×1000 prekriti koristeći isključivo likove prikazane na slikama:



postavljene upravo na taj način? Likove **nije** dozvoljeno rotirati niti zrcaliti. Trebaju biti postavljeni tako da prekrivaju točno tri odnosno pet polja ploče i ne smiju se preklapati.

(hoće li netko reći: "ta tri lika prekrivaju ukupno 11 polja, pa ne mogu prekriti cijelu ploču" ?)

JE LI BOLJE otprilike ovako:

Lik A može se postaviti u bilo kojem položaju, dok lik B mora biti točno u prikazanom položaju (ne smije se rotirati ni zrcaliti).

Rješenje.

Naizmjenično popunjavamo sporedne dijagonale ploče brojevima 1, 2 i 4 tako da je u gornjem lijevom kutu broj 1 i da su na svakoj sporednoj dijagonali svi brojevi jednaki. Uočimo da je tada suma brojeva koje prekriva svaka figura djeljiva sa 7. Želimo još pokazati da ukupan zbroj svih brojeva na ploči nije djeljiv sa 7. Promotrimo bilo koja 3 uzastopna polja tablice, u istom retku ili istom stupcu. To su sigurno brojevi 1, 2, 4 u nekom poretku pa je ta suma djeljiva sa 7. Sada ako promotrimo bilo kojih 999 uzastopnih polja, dobijamo da je suma na njima djeljiva sa 7 jer možemo tih 999 polja gledati kao 333 bloka od po 3 uzastopna polja. Sada promotrimo prvih 999 polja svakog retka, oni čine 1000×999 tablicu i suma brojeva u njoj je djeljiva sa 7. Dodatno, promotrimo prvih 999 polja zadnjeg stupca, i tamo je suma brojeva dljeliva sa 7. Jedino polje koje nismo razmotrili je donji desni kut, pa ukupna suma brojeva na ploči daje ostatak 1, 2 ili 4 pri dijeljenju sa 7 i time je dokazano da traženo popločavanje ne postoji.

Zadatak 3.

Dirališta upisane kružnice trokuta ABC sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ su redom točke D i E. Dirališta pripisane kružnice nasuprot vrha A s pravcima AB i AC su redom točke F i G.
Neka simetrale kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ACB$ sijeku pravac DE u točkama X i Y redom te neka vanjske simetrale kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ACB$ sijeku pravac FG u točkama Z i W redom.

Dokaži da je četverokut $XYZW$ tetivan.

JE LI BOLJE:

Dokaži da je četverokutu $XYZW$ može opisati kružnica.

Rješenje.

Neka je točka I središte upisane kružnice trokuta ABC. Označimo sa $\alpha = |\sphericalangle CAB|, \beta = |\sphericalangle ABC|, \gamma = |\sphericalangle BCA|$. S obzirom da je trokut BDE jednakokračan znamo da je $|\sphericalangle BDE| = 90° - \beta/2 \implies |\sphericalangle ADX| = 90° + \beta/2$. S obzirom da je $|\sphericalangle DAX| = \alpha/2$ iz trokuta AXD znamo da je $|\sphericalangle DXA| = \gamma/2 = |\sphericalangle ECI|$ što implicira da je četverokut $ECIX$ tetivan. To nam dalje daje $|\sphericalangle CXA| = |\sphericalangle IEC| = 90°$ što implicira da X leži na kružnici s promjerom AC. Analogno se pokaže da Y, Z, W isto leže na kružnici s promjerom AC što znači da je četverokut $XYZW$ tetivan, kao što smo i htjeli pokazati.

Zadatak 4.

Odredi sve brojeve $k \in \mathbb{N}$ takve da

$$\frac{m+n}{m^2 - kmn + n^2}$$

nije složen prirodni broj ni za koji izbor $m, n \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

Neka je $k \in \mathbb{N}$ broj sa traženim svojstvom. Uvrstimo li $(m,n)=(k,1)$, dobivamo

$$\frac{m+n}{m^2-kmn+n^2}=\frac{k+1}{k^2-k^2+1}=k+1.$$

Uvrštavanjem $(m,n)=(k^2+k-1,k+1)$ dobivamo

$$\frac{m+n}{m^2-kmn+n^2}=\frac{k^2+2k}{(k^2+k-1)^2-(k^2+k)(k^2+k-1)+(k+1)^2}=k.$$

Prema tome, brojevi k i $k+1$ nisu složeni. Budući da je točno jedan od njih paran, odavde slijedi $k=1$ ili $k=2$.

Za $k=1$ imamo $\frac{m+n}{m^2-mn+n^2}\leqslant 2$, stoga traženi izraz nikada nije složen prirodan broj. Zaista,

$$\frac{m+n}{m^2-mn+n^2}\leqslant 2 \iff m+n\leqslant 2(m^2-mn+n^2) \iff 0\leqslant (m-n)^2+m(m-1)+n(n-1),$$

a posljednja nejednakost očito vrijedi.

Za $k=2$ dobivamo izraz $\frac{m+n}{(m-n)^2}$, pa vidimo da uvrštavanjem npr. $m=5$ i $n=4$ izraz poprima složenu vrijednost 9.

Time smo pokazali da je $k=1$ jedini broj sa traženim svojstvom.