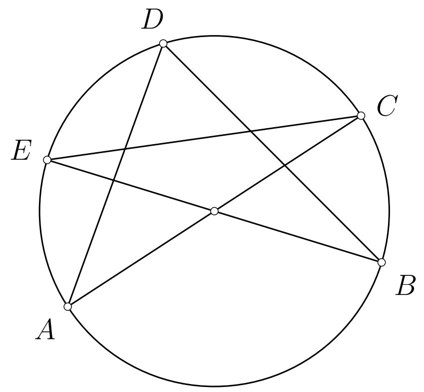
JBMO pripreme - Tetivni četverokuti

Matija Bašić

12. lipnja 2019.

Angle chasing



1. Na kružnici je dano pet točaka kao na slici. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BE}$ sijeku se u središtu kružnice. Ako je $\sphericalangle DAC = 37°$ i $\sphericalangle EBD = 28°$, odredite kut $\sphericalangle ACE$.

2. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B. Tangenta kroz A na k_1 siječe k_2 u A i C. Paralela s AC kroz točku B siječe k_1 i k_2 redom u točkama D i E. Dokaži da je $ADEC$ paralelogram.

3. U konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle BAD = 50°$, $\sphericalangle ADB = 80°$ i $\sphericalangle ACB = 40°$. Ako je $\sphericalangle DBC = 30° + \sphericalangle BDC$, izračunaj $\sphericalangle BDC$.

4. Neka su A_1, B_1, C_1 nožišta visina trokuta ABC. Dokažite da je ortocentar trokuta ABC središte kružnice upisane trokutu $A_1B_1C_1$.

5. Neka je H ortocentar trokuta ABC. Na opisanoj kružnici tog trokuta odabrana je točka K takva da je $\sphericalangle AKH = 90°$. Dokažite da pravac HK raspolavlja dužinu $\overline{BC}$.

6. Neka je H ortocentar trokuta ABC. Dokaži da su kružnice opisane trokutima ABC, ABH, BCH i CAH sukladne.

7. Dokažite da se polovišta stranica, polovišta spojnica vrhova s ortocentrom i nožišta visina trokuta nalaze na istoj kružnici. Tu kružnicu nazivamo *Feuerbachova kružnica* ili *kružnica devet točaka.*

8. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B. Pravac l siječe kružnicu k_1 u točkama C i E, a kružnicu k_2 u točkama D i F tako da se točka D nalazi između C i E, a točka E između D i F. Pravci CA i BF sijeku se u točki G, a pravci DA i BE u točki H. Dokaži da je $CF \parallel HG$.

9. Dana je pokuružnica sa središtem O i promjerom $\overline{AB}$. Pravac p siječe pravac AB u točki M, a polukružnicu u točkama C i D tako da je $|MB| < |MA|$ i $|MD| < |MC|$. Točka K je drugi presjek kružnica opisanih trokutima AOC i BOD. Dokaži da je $\sphericalangle MKO = 90°$.

Fantomska točka

1. Dokaži da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici tog trokuta.

2. Na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC nalaze se točke D i E tako da je točka D između C i E. Neka je F sjecište kružnice opisane trokutu ABD s pravcem koji prolazi kroz točku E i paralelan je s BC tako da se točke E i F nalaze s različitih strana pravca AB. Neka je G sjecište kružnice opisane trokutu BCD s pravcem koji prolazi kroz točku E i paralelan je s AB tako da se točke E i G nalaze s različitih strana pravca BC. Dokaži da točke D, E, F i G leže na istoj kružnici.

Potencija točke

1. Neka je $ABCDEF$ šesterokut upisan u kružnicu. Dužina $\overline{BE}$ siječe dužinu $\overline{AC}$ u točki G, a dužinu $\overline{DF}$ u točki H. Ako je $|CG| = |HG| = 3$, $|HF| = 5$ i $|BG| = |HD| = 2$, odredi $|AC|$.

2. Neka su $k(I, r)$ i $k(O, R)$ redom upisana i opisana kružnica trokutu ABC, dokažite
$$|OI|^2 = R^2 - 2Rr.$$

3. Simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ u trokutu ABC siječe nasuprotnu stranicu u točki S. Točka T je polovište stranice $\overline{BC}$. Kružnica opisana trokutu AST siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D, a stranicu $\overline{AC}$ u točki E. Dokažite da je $|BD| = |CE|$.

4. Neka je D polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC i neka je E točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $\sphericalangle EDA = \sphericalangle ABC$. Točkom E povučena je paralela s $\overline{BC}$ koja siječe $\overline{AD}$ u točki F. Dokažite da je $|AF| \cdot |DF| = |EF|^2$.

Radikalno središte

1. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC dane su redom točke D i E takve da su pravci BC i DE paralelni, a unutar trokuta ADE je dana točka P. Pravac DE siječe pravce PB i PC redom u točkama F i G. Ako su O_1 i O_2 središta kružnica opisanih trokutima DPG i EPF, dokaži da su pravci AP i O_1O_2 okomiti.

2. U šiljastokutnom trokutu ABC vrijedi $|BC| < |AC|$. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$, a neka su D i E redom nožišta visina iz vrhova A i B. Neka je H ortocentar, a R presjek pravaca DE i AB. Dokaži da su pravci CM i RH okomiti.