IMO pripreme 2019 – Teži zadaci s analizom rješenja

sastavio: Borna Vukorepa

11. 6. 2019.

1. Neka su $n \geqslant k$ prirodni brojevi i F familija konačnih skupova koja sadrži bar $\binom{n}{k} + 1$ različitih skupova s točno k članova. Dodatno, za svaka dva skupa iz F, njihova unija je također u F. Dokaži da F sadrži bar tri skupa s bar n elemenata.

2. Prirodan broj je *dobar* ako je zbroj kvadrata i kuba prirodnih brojeva. Dokaži da za svaki $n \geqslant 2$ postoji beskonačno mnogo prirodnih m takvih da skup $\{m+1, m+2, \ldots, m+n^2\}$ sadrži točno $n+1$ dobar broj.

3. Trojka polinoma $u, v, w \in \mathbb{R}[x, y, z]$ je dobra ako postoje $P, Q, R \in \mathbb{R}[x, y, z]$ takvi da u smislu polinoma vrijedi ova jednakost:

$$u^{2019}P + v^{2019}Q + w^{2019}R = 2019.$$

a) Je li trojka

$$u = x + 2y + 3, \quad v = y + z + 2, w = x + y + z$$

dobra?

b) Je li trojka

$$u = x + 2y + 3, \quad v = y + z + 2, w = x + y - z$$

dobra?

4. Dan je trokut ABC kojem je I centar upisane kružnice, a k opisana kružnica. AI siječe k dodatno u D. Neka je E na luku BDC, a F na $\overline{BC}$ tako da je $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Ako je G polovište $\overline{IF}$, dokaži da se EI i DG sijeku na k.

5. Nađi sve $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve prirodne m, n vrijedi:

$$0 \neq f(m) + f(n) - mn \mid mf(m) + nf(n).$$

6. Nađi sve prirodne n takve da $\phi(n) \mid n^2 + 3$.

Linkovi na hintove i rješenja

1. https://artofproblemsolving.com/community/c7h1279183p6722154
2. https://vjimc.osu.cz/storage/uploads/j27solutions2.pdf
3. https://vjimc.osu.cz/storage/uploads/j29solutions1.pdf
4. https://artofproblemsolving.com/community/c6h356083p1935927
5. https://artofproblemsolving.com/community/c6h1480691p8639255
6. https://vjimc.osu.cz/storage/uploads/j26solutions1.pdf