IMO pripreme 2019 – Polinomi

sastavio: Petar Orlić

9. 6. 2019.

1. Neka je $P \in \mathbb{Z}[x]$ i $P(\ldots(P(x))\ldots) = x$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Dokaži da je $P(P(x)) = x$.

2. Neka je $P \in \mathbb{Z}[x]$ i $a_1 < \ldots a_k$ cijeli brojevi koji nisu nultočke od P. Dokaži da postoji $a \in \mathbb{Z}$ takav da $P(a_i) \mid P(a)$ za sve i.

3. Neka su m, n, a prirodni i neka je $p < a - 1$ prost. Dokaži da je $P(x) = x^m(x-a)^n + p$ ireducibilan nad $\mathbb{Z}$.

4. Niz cijelih brojeva $(a_n)_n$ ima svojstvo $m - n \mid a_m - a_n$ za sve prirodne m, n. Pretpostavimo da postoji polinom P takav da je $P(n) > |a_n|$ za sve prirodne n. Dokaži da postoji polinom Q takav da je $Q(n) = a_n$ za sve prirodne n.

5. Polinom P ima svojstvo da za svaki $y \in \mathbb{Q}$ postoji $x \in matbbQ$ takav da je $P(x) = y$. Dokaži da je P linearan.

6. Nađi sve polinome $P \in \mathbb{Z}[x]$ takve da $P(n) \mid 2^n - 1$ za sve prirodne n.

7. Neka je $P \in \mathbb{Z}[x]$ čije su sve nultočke modula 1. Dokaži da su sve nultočke od P korijeni jedinice, odnosno da $P(x) \mid (x^n - 1)^k$ za neke n, k.

8. Neka je S konačan skup cijelih brojeva. Dokaži da postoji broj c, ovisan o S, takav da za svaki nekonstantni $f \in \mathbb{Z}[x]$ broj cijelih brojeva k za koje je $f(k) \in S$ ne prelazi $max(deg(f), c)$.

Većina zadataka, zajedno s rješenjima, nalazi se na stranici

https://imomath.com/index.php?options=619

Osmi zadatak nalazi se na

https://vjimc.osu.cz/storage/uploads/j23solutions1.pdf