MEMO pripreme 2019 – Teorija brojeva

Marijan Polić

16. 6. 2019.

1. Pokaži da ne postoji prirodan n takav da
$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{(2k+1)^n}{k}$$
bude cijeli broj.

2. Neka je p prost broj. Zadan je niz (a_k) gdje je a_k ostatak (između 0 i $p-1$) dijeljenja broja k^{2p-1} sa p. Dokaži da je
$$\sum_{i=p}^{2p-1} a_i = \frac{p^2-p}{2}.$$

3. Dokaži da je $\phi(n) + \sigma(n) \geq 2n$ za svaki prirodan n. ($\sigma(n)$ predstavlja sumu prirodnih faktora broja n.)

4. Dokaži da za sve prirodne n vrijedi
$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor.$$

5. Neka je p prost broj koji pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 3. Dokaži da za niti jedan skup S koji se sastoji od $p-1$ uzastopnih prirodnih brojeva, ne postoje disjunktni podskupovi A i B takvi da $A \cup B = S$ te
$$\prod_{a\in A} a = \prod_{b \in B} b.$$

6. Skup $S = \{1, 2, \ldots, 1998\}$ je particioniran u 999 disjunktnih uređenih parova (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots, 999$, takvih da je $|a_i - b_i| \in \{1, 6\}$ za svaki i. Dokaži da je u dekadskom zapisu sume $\sum_{i=1}^{999} |a_i - b_i|$ zadnja znamenka 9.

7. Dokaži da za svaki prirodan n postoje neka dva uzastopna prirodna broja takva da se svaki od njih može prikazati kao produkt n prirodnih brojeva većih od 1.

8. Pokaži da ne postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $ap + bq$ prost za sve različite proste p i q.

9. Neka je n prirodan broj, $a_1 = n$. Za $k > 1$ definiramo $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ takav da $k | a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Za svaki n, takav niz je jedinstven. Npr. za $n = 9$ dobije se niz 9, 1, 2, 0, 3, 3, 3, $\ldots$.
Dokaži da se niz stabilizira za svaki n, odnosno da postoji indeks $l \in \mathbb{N}$ takav da $k \geq l \Rightarrow a_k = a_l$.