

# JBMO pripreme 2019: N–Mix

---

Petar Bakić

15. 06. 2019.

1. Dokaži da je razlomak  $\frac{21n+4}{14n+3}$  skraććen do kraja za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Iz skupa  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  odabrano je  $n + 1$  brojeva. Dokaži da među njima postoje dva koja su relativno prosta.
3. Nađi sve proste brojeve  $p$  takve da broj  $p^2 + 11$  ima točno šest djeljitelja.
4. Nađi sve parove prirodnih brojeva  $x, y$  za koje je  $2^x + 3^y$  potpun kvadrat.
5. Nađi sve trojke prirodnih brojeva  $x, y, z$  za koje vrijedi  $3^x + 4^y = 5^z$ .
6. Nađi sve cijele brojeve  $m$  i  $n$  za koje vrijedi  $m^5 - n^5 = 16mn$ .
7. Nađi sve prirodne brojeve  $n$  koji su djeljivi sa svim brojevima manjim od ili jednakim  $\sqrt{n}$ .
8. Neka su  $m$  i  $n$  prirodni brojevi za koje vrijedi  $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$ . Dokaži da je tada  $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$ .
9. Nađi sve brojeve  $n$  za koje  $n^2$  dijeli  $(n - 1)!$ .
10. Dokaži da šest uzastopnih prirodnih brojeva ne možemo podijeliti u dva skupa čiji su umnošci međusobno jednaki.
11. Iz skupa  $\{1, 2, \dots, 2n - 1\}$  odabrano je  $n + 1$  brojeva. Dokaži da među njima možemo odabrati tri tako da je jedan zbroj preostala dva.