Zagrijavanje

Utrka do 20

- Odigrajte ovu igru u paru: Prvi igrač započinje tako da odabere broj 1 ili 2. U sljedećim potezima igrači dodaju prethodnom broju broj 1 ili 2. Pobjednik je igrač koji prvi dođe do 20.
- Tko je pobijedio? Možete li savjetovati kako treba igrati?
- Formulirajte strategiju za igru u kojoj treba doći do broja n, $n \in \mathbb{N}$.

Utrka do 100

- Odigrajte ovu varijaciju igre: Prvi igrač započinje tako da odabere prirodni broj od 1 do 10. U sljedećim potezima igrači dodaju prethodnom broju prirodni broj od 1 do 10. Pobjednik je igrač koji prvi dođe do 100.
- Kako treba igrati?
- Formulirajte strategiju za igru u kojoj treba doći do broja n, a dodaju se brojevi iz skupa $\{1,2,\dots,m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Kombinatorne igre

U kombinatornoj igri sudjeluju dva igrača koji naizmjenično povlače poteze. Nema elemenata slučajnosti i igra može završiti samo pobjedom jednog, odnosno porazom drugog igrača. Svi podatci o igri dostupni su obojici igrača i pretpostavljamo da obojica povlače najbolje poteze kako bi pobijedili. Igra završava nakon konačnog broja poteza. Pobjednička strategija je strategija koja dovodi do pobjede igrača, neovisno o potezima protivnika.

Pobjednička je pozicija ona iz koje se može u jednom potezu pomaknuti u barem jednu gubitničku poziciju. Gubitnička pozicija je ona iz koje se u jednom potezu može pomaknuti samo u pobjedničku poziciju. Pobjednička strategija starta iz pobjedničke pozicije i u svakom potezu bira gubitničku.

Pomakni pločicu

Pločica se nalazi u donjem lijevom kutu kvadratne mreže. Igrač koji je na potezu može pomaknuti pločicu jedno ili dva polja desno ili u kvadratić u redu iznad koji je u krajnjem lijevom položaju. Pobjeđuje igrač koji je povukao posljednji potez. Odredite pobjedničke i gubitničke pozicije i pobjedničku strategiju za mrežu dimenzija

a) 4×4

b) 5×5.

Oboji ploču

Odigrajte u paru: Igra se na pravokutnoj ploči $2 \times n$ podijeljenoj na kvadratiće 1×1. Igrač koji je na potezu treba obojati jedan ili dva susjedna (horizontalna ili vertikalna) kvadratića. Pobjednik je igrač koji je povukao zadnji potez. Ima li neki od igrača pobjedničku strategiju?

Zapiši broj

Dva igrača zapisuju broj s parnim brojem znamenki koristeći znamenke 1, 2, 3, 4 i 5. Znamenke zapisuju naizmjence s lijeva na desno. Ako je dobiveni broj djeljiv s 9 pobjednik je drugi igrač. U suprotnom pobjednik je prvi igrač. Ima li neki igrač pobjedničku strategiju ako se zapisuje

a) četveroznamekasti broj

b) šesteroznamekasti broj

c) osmeroznamenkasti broj

d) broj s $2p$ znamenki.

Chomp

Igru Chomp izmislio je David Gale. Igra se na pravokutnoj ploči čokolade podijeljenoj na kvadratiće, dimenzija $m \times n$. Igrači naizmjence biraju jedan kvadratić čokolade te pojedu izabrani kvadratić i sve kvadratiće koji se nalaze iznad ili desno od njega. Kvadratić na donjem lijevom rubu ploče je otrovan - igrač koji ga pojede je izgubio. Koji igrač ima pobjedničku strategiju na ploči dimenzija

a) 4×4

b) $2 \times n$?

Zadatci:

1. Dva igrača startaju s hrpom od n kuglica. Igrač koji je na potezu uzima s hrpe 1, 2 ili 3 kuglice. Pobjednik je igrač koji uzme posljednju kuglicu. Istražite koji igrač ima pobjedničku strategiju.

2. Dva igrača startaju s brojem 60. Igrač koji je na potezu umanjuje broj za neki njegov djelitelj. Gubi igrač koji dobije 0. Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

3. Dva igrača naizmjence zapisuju znamenke s lijeva na desno broja s $2p$ znamenaka koristeći samo znamenke 6, 7, 8, 9. Ako je dobiveni broj djeljiv s 9, pobjednik je drugi igrač. U suprotnom, pobjednik je prvi igrač. Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

4. Brojevi 1, 2, 3, …, 2017 zapisani su na ploči. Dva igrača naizmjence brišu dva broja a i b na ploči i zapisuju broj $|a-b|$ sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj. Prvi igrač pobjeđuje ako je preostali broj paran, a drugi ako je neparan. Tko ima pobjedničku strategiju?

5. Na stolu se nalaze 1234 kamenčića. Ratko i Rudi igraju sljedeću igru: najprije Ratko uzme neki paran broj kamenčića, najmanje dva, ali ne više od 100, a zatim Rudi uzme neki neparan broj kamenčića, najmanje jedan, ali ne više od 99. Potezi se dalje vuku naizmjenično, poštujući iste uvjete. Igrač pobjeđuje ako pokupi sve kamenčiće ili ako drugi igrač ne može odigrati svoj potez. Tko ima pobjedničku strategiju, tj. može pobijediti neovisno o igri drugog igrača? (Općinsko 2012. četvrti razred)

6. Dva igrača stavljaju pješake na ploču dimenzija 2001×2001. Igrač može staviti pješaka na prazno mjesto na ploči ako i samo ako u pripadnom retku i stupcu zajedno, ima više od 1000 slobodnih mjesta. Gubi onaj igrač koji ne može staviti pješaka. Koji igrač ima pobjedničku strategiju? (Županijsko 2001. prvi razred)
   Rješenje:

7. Dva igrača, A i B igraju sljedeću igru: A i B zapisuju naizmjenično po jednu znamenku sve dok ne napišu šesteroznamenkasti broj, pri čemu se niti jedna znamenka ne smije ponoviti. Prva znamenka mora biti različita od 0. Igrač A igra prvi, a znamenke se pišu redom slijeva nadesno. Igrač A pobjeđuje ako je napisani šesteroznamenkasti broj djeljiv s 2, 3 ili 5, a u suprotnom pobjeđuje igrač B. Dokaži da igrač A ima strategiju za pobjedu, tj. može pobijediti neovisno o igri igrača B. (Državno 2009. prvi razred)

8. Dva igrača igraju na 5×5 ploči koja je podijeljena na 25 jediničnih kvadrata. Zadan je prirodni broj $k \leq 25$ i neograničeni broj L-trimina. Igrači naizmjence označavaju jedinične kvadrate na ploči sve dok ne označe ukupno k kvadrata.
   Raspored L-trimina na neoznačenim jediničnim kvadratima je dobar ako se L-trimini ne preklapaju i svaki od njih pokriva točno tri neoznačena jedinična kvadrata. Drugi igrač pobjeđuje ako svaki dobar raspored L-trimina ostavlja nepokrivena barem tri neoznačena jedinična kvadrata. Odredi minimalnu vrijednost k za koju drugi igrač ima pobjedničku strategiju. (19. JBMO)

9. Na hrpi je više od n^2 kamenčića. Peter i Vasya igraju igru, a prvi je na potezu Peter. U svakom potezu igrač može uzeti bilo koji prost broj manji od n kamenčića ili bilo koji višekratnik od n kamenčića ili 1 kamenčić. Dokažite da Peter ima pobjedničku strategiju. (Russian mathematical Olympiad 2011)

10. Na ploči su zapisani svi pozitivni djelitelji broja N. Dva igrača, A i B igraju ovu igru naizmjence povlačeći poteze. U prvom potezu igrač A obriše N. Nakon toga igraju po pravilu: ako je prethodno izbrisani broj d, sljedeći igrač može obrisati djelitelj od d ili višekratnik od d. Igrač koji ne može povući potez gubi. Odredite sve vrijednosti broja N za koje igrač A može pobijediti neovisno o potezima igrača B. (MEMO 2010)

Literatura:

MATHEU Identification, Motivation and Support of Mathematical Talents in European Schools, Volume 2 i 3

Praktični MERIA vodič za istraživački usmjerenu nastavu matematike