JBMO pripreme - Kombinatorna geometrija

Matija Bašić

25. svibnja 2019.

Korištene ideje: princip ekstrema, Dirichletov princip, princip srednje vrijednosti, konveksna ljuska, induktivno zaključivanje, triangulacija mnogokuta.

Zadaci

1. U ravnini je $2n+1$ gangstera koji se svi nalaze na različitim udaljenostima. Svatko gađa loptom najbližeg. Dokaži da
   (a) barem jednog nitko neće pogoditi.
   (b) nitko nije pogođen s više od 5 lopti.
   (c) putevi lopti se ne križaju.
   (d) skup dužina kojeg formiraju putevi lopti ne sadrži zatvoren poligon.
2. Dano je konačno mnogo točaka u ravnini tako da površina svakog trokuta kojem su vrhovi neke tri od danih točaka nije veća od 1. Dokaži da se sve točke može pokriti trokutom površine 4.
3. (Sylvesterov problem) U ravnini je dano konačno mnogo nekolinearnih točaka. Dokaži da postoji pravac koji sadrži točno dvije od zadanih točaka.
4. (JBMO 2017) Neka je P pravilni $2n$-terokut s vrhovima A_1, $A_2 \ldots A_{2n}$. Za točku S na stranici poligona P kažemo da se vidi iz točke E koja je izvan P ako dužina $\overline{SE}$ ne sadrži nijednu drugu točku iz P osim S. Stranice mnogokuta P (bez vrhova) obojimo u tri boje tako da je svaka stranica obojana u točno jednu boju i svaka boja se iskoristi barem jednom. Nadalje, iz svake točke koja je izvan P vide se točke na P u najviše dvije različite boje. Odredi broj različitih takvih bojanja mnogokuta P. (bojanja smatramo različitim ako je barem jedna strana drugačije obojana).
5. (JBMO 2004) Promotrimo konveksan mnogokut s n vrhova, $n \geqslant 4$. Na proizvoljan način dijelimo mnogokut na trokut čiji vrhovi su vrhovi mnogokuta tako da nikoja dva trokuta nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka. Trokute kojima su dvije stranice ujedno i stranice mnogokuta bojimo u crno, one kojima je jedna stranica ujedno i stranica mnogokuta u crveno, a one kojima nijedna stranica nije stranica mnogokuta u bijelo. Dokaži da je crnih trokuta za dva više nego bijelih.
6. Neka su A i B disjunktni mnogokuti u ravnini. Dokaži da postoji pravac koji istovremeno raspolavlja površinu oba mnogokuta.
7. Dano je $2n+3$ točaka u ravnini tako da se nikoje tri ne nalaze na istom pravcu i nikoje četiri na istoj kružnici. Dokaži da postoji kružnica koja prolazi kroz neke tri od zadanih točaka i unutar koje se nalazi točno n zadanih točaka.

Domaća zadaća

1. U ravnini je dano $2n$ točaka. Dokaži da je točke moguće spojiti s n dužina tako da se nikoje dvije dužine ne sijeku.

2. U ravnini je dan konačan skup točaka raspoređenih tako da svaki trokut čiji su vrhovi u danom skupu možemo prekriti trakom širine 1. Dokaži da se cijeli skup može prekriti trakom širine 2.

3. U ravnini je dano $3n$ točaka tako da nikoje tri nisu kolinearne. Dokaži da su te točke vrhovi $3n$ disjunktnih trokuta.

4. Dano je 8 kockica čije strane su obojane tako da je točno 24 strana crveno, a 24 plavo. Dokaži da se od tih kockica može složiti $2 \times 2 \times 2$ kocka kojoj se na oplošju nalazi jednak broj plavih i crvenih kvadrata 1×1.

5. Promotrite konačno mnogo točaka u ravnini takvih da nikoje tri točke ne leže na jednom pravcu. Svaku od tih točaka možemo obojati crvenom ili zelenom bojom tako da svaki trokut kojem su vrhovi iste boje u svojoj unutrašnjosti sadrži barem jednu točku druge boje. Koji je najveći mogući broj takvih točaka?

6. U ravnini je povučeno konačno mnogo pravaca tako da nikoja tri pravca ne prolaze kroz istu točku. Dokaži da je povezana područja ravnine određena tim pravcima moguće obojati u dvije boje tako da nikoja dva susjedna područja nemaju istu boju.