IMO/MEMO Pripreme 2019. Kombinatorna Geometrija

sastavio: Leon Starešinić

1 Kombinatorna geometrija

1. Za konačan skup točaka u ravnini S, dokažite da ili sve točke u njemu leže na jednom pravcu ili postoji pravac na kojem se nalaze točno dvije točke.

2. Za konačan skup jednakih kvadrata s paralelnim stranicama vrijedi da za svaki podskup od $k+1$ kvadrata neka dva imaju presjek. Dokažite da se taj skup može particionirati u najviše $2k-1$ nepraznih grupa takvih da svi kvadrati unutar jedne grupe imaju zajedničku točku.

3. U ravnini je dano n kružnica s polumjerom 1 takvih da bilo koji trokut kojeg čine neka tri središta tih kružnica ima površinu najviše A. Dokažite da postoji pravac koji siječe barem $\frac{n}{1+\sqrt{A}}$ kružnica.

4. Neka je n prirodan broj veći od 1. Dano je $2n$ točaka ravnini takvih da nikoje tri ne leže na istom pravcu, te ih je n obojano plavo i n crveno. Pravac je *balansiran* ukoliko prolazi kroz jednu crvenu i jednu plavu točku, te se s obje strane pravca nalazi jednako plavih i crvenih točaka. Dokažite da postoje barem dva balansirana pravca.

5. Zadan je skup S od $2n+1$ točaka u ravnini, takavih da nikoje tri nisu kolinearne i nikoje četiri konciklične. Kružnica je *raspolavljajuća* ukoliko prolazi kroz tri točke iz S i u svojoj unutrašnjosti sadrži točno $n-1$ točaka iz S. Dokažite da postoji barem $\frac{2n^2+n}{3}$ raspolavljajućih kružnica.

6. *Obrezati* konveksni n-terokut znači odabrati par uzastopnih stranica AB, BC i zamijeniti ih s dužinama AM, MN, i NC, gdje je M polovište AB i N polovište BC. Drugim riječima, maknemo trokut MBN i dobijemo $(n+1)$-terokut. Obrezivanjem pravilnog šesterokuta $\mathcal{P}_6$ površine 1 dobijemo sedmerokut $\mathcal{P}_7$. Onda obrežemo $\mathcal{P}_7$ (na jedan od 7 mogućih načina) i dobijemo osmerokut $\mathcal{P}_8$, i tako dalje. Dokažite da je površina od $\mathcal{P}_n$ uvijek veća od $\frac{1}{3}$, za sve $n \geq 6$.