IMO pripreme 2015 – Kombinatorika

sastavio: Matija Bašić

1. zadatak: (Italija 1999) Albert i Barbara igraju sljedeću igru. Na stolu se nalazi 1999 štapića: svaki igrač u jednom potezu uklanja sa stola barem jedan štapić, a najviše pola preostalih štapića. Igrač koji ostavi samo jedan štapić na stolu gubi igru. Barbara igra prva. Odredi koji igrač ima pobjedničku strategiju.

2. zadatak: (Kina 2011) Kažemo da je podskup $M \subseteq \{1, 2, \ldots, 2011\}$ sjajan ako zadovoljava sljedeće svojstvo: Među bilo koja tri elementa u M postoje dva, a i b, takvi da a dijeli b ili b dijeli a. Odredi maksimalan broj elemenata u sjajnom podskupu M.

3. zadatak: (Bugarska 1999) Na natjecanju 8 sudaca ocijenjuje natjecatelje jednom od dvije ocjene: prošao ili pao. Poznato je da su za svaka dva natjecatelja, dva suca ocijenila oba natjecatelja s prošao; dva suca su ocijenila prvog natjecatelja s prošao i drugog s pao; dva suca su ocijenila prvog natjecatelja s pao i drugog s prošao; te konačno dva suca su oba natjecatelja ocijenila s pao. Odredi najveći mogući broj natjecatelja.

4. zadatak: (Japan) Dan je prirodan broj $n \geqslant 3$. Dokaži da postoji skup A_n s n elemenata takav da za svaki $a \in A_n$ produkt ostalih elemenata iz A_n daje ostatak 1 pri dijeljenju s a.

5. zadatak: (Kina 1999) Dano je 99 svemirskih stanica. Svaki par stanica je povezan tunelom. Postoji 99 dvosmjernih glavnih tunela, a svi ostali tuneli su isključivo jednosmjerni. Grupu od 4 stanice nazivamo povezanom ako se u svaku stanicu te grupe može doći iz bilo koje druge stanice iz grupe tako da se koristi samo 6 tunela koji povezuje te 4 stanice. Odredi najveći mogući broj povezanih grupa.

6. zadatak: (Razni izvori) Svaku od 1000 kartica na kojima su napisane sve trojke od 000 do 999 treba staviti u jednu od 100 kutija označenih parovima 00 do 99. Karticu abc mozemo staviti u bilo koju od tri kutije označene ab, ac ili bc. Odredi najmanji potreban broj kutija da bi se rasporedile sve kartice.

7. zadatak: (Kina 2010) Na $n + 1$ pozicija označenih A_1, A_2, $\ldots$, A_n i O nalaze se kartice. Dozvoljeno je napraviti sljedeće poteze

- Ako su na poziciji A_i barem 3 kartice, onda smijemo uzeti 3 kartice s te pozicije i staviti po jednu karticu na pozicije A_{i-1}, A_{i+1} i O (pri čemu je $A_0 = A_n$ i $A_{n+1} = A_1$).

- Ako je na poziciji O barem n kartica, onda smijemo uzeti n kartica s te pozicije i staviti po jednu karticu na pozicije A_1, A_2, $\ldots$, A_n.

Ako je ukupan broj kartica barem n^2+3n+1, dokaži da postoji niz poteza kojim možemo postići da se na svakoj poziciji nalazi barem $n+1$ kartica.

8. zadatak: (Koreja 2003) Neka su m i n relativno prosti brojevi takvi da je $6 \leqslant 2m < n$. Promotrimo n različitih točaka na kružnici. Počevši od jedne od tih n točaka, recimo P, dužinom spajamo P s m-tom točkom Q u smjeru kazaljke na satu od P, nakon toga dužinom spajamo Q s m-tom točkom R u smjeru kazaljke na satu od Q, i tako dalje. Ponavljamo ovaj postupak sve dok više nije moguće povući novu dužinu. Neka je I broj presjeka povučenih dužina unutar kružnice.

(a) Odredi najveću moguću vrijednost za I u terminima m i n pri varijaciji položaja n točaka.

(b) Dokaži da vrijedi $I \geqslant n$ bez obzira na položaj n točaka.

9. zadatak: (Koreja 2009) Na stolu se nalazi 2015 žetona koji su s jedne strane bijele, a s druge crne. Žetoni su složeni u niz. Na početku su svi osim jednog žetona okrenuti bijelom stranom prema gore. U svakom koraku odabiremo žeton koji je okrenut crnom stranom prema gore i preokrenemo susjedna dva žetona. Ako smo odabrali žeton na rubu, onda preokrenemo samo jedan susjedni žeton. Odredite sve pozicije na kojima se na početku može nalaziti žeton okrenut crnom stranom prema gore za koju je moguće nizom dozvoljenih poteza sve žetone okrenuti crnom stranom prema gore.

10. zadatak: (Koreja 2011) Na zabavi je n dječaka $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i n djevojčica $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Nijedan dječak se nije rukovao s drugim dječakom, te se niti jedna djevojčica nije rukovala s drugom djevojčicom. Također, dječak a_i se nije rukovao s djevojčicom b_i za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Želimo podijeliti svih $2n$ ljudi u grupe tako da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

(a) U svakoj grupi je broj dječaka jednak broju djevojčica.

(b) Ni u kojoj grupi ne postoje dva čovjeka koja su se rukovala.

Neka je m broj parova (a_i, b_j) za koje se dječak a_i rukovao s djevojčicom b_j. Dokaži da je moguće ljude podijeliti u $\dfrac{2m}{n}+1$ ili manje grupa.

11. zadatak: (Kina 2009) Neka su m i n prirodni brojevi takvi da je $4 < m < n$ i neka je $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ pravilan $(2n+1)$-terokut. Odredi broj konveksnih m-terokuta koji imaju točno dva šiljasta unutarnja kuta i čiji vrhovi su u skupu $\{A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}\}$.

12. zadatak: (Rusija 1999) Kvadrat dimenzija $n \times n$ je nacrtan na beskonačnoj šahovnici. Svako od n^2 polja kvadrata na početku sadrži jedan žeton. Potez se sastoji u skakanju žetona preko susjednog žetona (horizontalno ili vertikalno) na prazno polje; žeton preko kojeg se skoči se uklanja. Niz poteza je izveden na takav način da više nije moguće izvesti niti jedan drugi potez.

Dokaži da je napravljeno barem $\frac{n^2}{3}$ poteza.

13. zadatak: (St. Petersburg 1996) Asteški dijamant reda n je lik koji se sastoji od jediničnih kvadratića cjelobrojne mreže u ravnini koji u potpunosti leže unutar kvadrata

$$\{(x, y) : |x| + |y| \leq n + 1\}.$$

Za svako popoločavanje asteškog dijamanta dominama (tj. pravokutnicima dimenzija 1×2), možemo rotirati bilo koji kvadrat dimenzija 2×2 kojeg popločavaju točno dvije domine. Dokaži da je najviše $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ rotacija (poteza) potrebno da bi se proizvoljno popločavanje pretvorilo u popločavanje u kojem su sve domine horizontalne.