Primjer 1.

Hrabri je vitez sreo troglavog zmaja i odlučio pokazati koliko je hrabar tako da odreže zmaju sve tri glave. No kad god je odrezao jednu njegovu glavu na tom su mjestu zmaju narasle tri nove glave. Vitez je i dalje nastavio rezati, no na kraju je ipak stao i odlučio izbrojati glave. Izbrojao ih je 2018? Je li dobro izbrojao?

Rješenje.
Nakon prvog rezanja: jedna glava će biti odrezana, a tri nove će se pojaviti, ukupno ih je 5. Dakle zmaj ima **dvije** glave više nego na početku.
Nakon drugog rezanja: Jedna glava će biti odrezana, a tri nove će se pojaviti, ukupno ih je 7. Zmaj ima **dvije** glave više nego nakon prvog poteza.
Nakon trećeg rezanja: Broj glava je opet narastao za dvije i sad ih je 9.
Dakle, nakon svakog rezanja broj glava naraste za 2, a kako smo počeli s neparnim brojem glava tj. 3, nakon svakog rezanja zmaj će imati neparan broj glava, što znači da vitez nije dobro izbrojao 2018 glava.

Primjer 2.

Učitelj je na ploči napisao brojeve 2, 3, 4. Zatim je prozivao jednog po jednog učenika da obriše napisane brojeve, a umjesto njih napiše sljedeća tri broja: dvostruki prvi broj minus drugi broj, dvostruki drugi minus treći broj, dvostruki treći minus prvi broj. Nastavite postupak dok ne dobijete brojeve -2, 1, 8! Mogu li učenici završiti igru?

Rješenje.
Promotrimo što se dešava u prvih nekoliko koraka:
$(2,3,4)\to(1,2,6)\to(0,-2,11)\to(2,-15,22)\to(19,-52,42)\to...$
Uočimo da je zbroj brojeva u provedenim koracima uvijek 9, a lako pokažemo da isto vrijedi u svakom koraku:
$2a-b+2b-c+2c-a=a+b+c$, gdje su a, b, c brojevi iz prethodnog koraka. Ako su početni brojevi 2,3,4, njihov je zbroj 9 i taj zbroj mora ostati bez obzira koliko koraka provedemo. Stoga nikada nećemo dobiti brojeve -2, 1, 8 jer je njihov zbroj 7.

Što su INVARIJANTE?
Uočimo da u svakom od prethodnih primjera postoji neka veličina koja se ne mijenja. U prvom primjeru to je parnost (neparnost) broja zmajevih glava, a u drugom primjeru zbroj brojeva u opisanom postupku.

Invarijanta je svojstvo ili veličina koje se ne mjenja nakon niza provedenih koraka prema nekom danom pravilu. Obično se koristi pri dokazivanju da je nešto nemoguće postići.

Primjer 3.

Može li se šahovska ploča 8×8 kojoj nedostaju gornji desni i donji lijevi kut pokriti pločicama 2×1?

Primjer 4.

U nekoj igri su uz vrhove šesterokuta *ABCDEF* redom upisani brojevi 1, 0, 1, 0, 0, 0. Prema pravilima, u svakom koraku Luka može odabrati dva susjedna vrha i uvećati njihove brojeve za jedan. Za pobjedu Luka bi trebao postići da u svih šest vrhova budu jednaki brojevi. Može li Luka pobijediti?

Primjer 5.

Na kartici su zapisana dva broja $(19, 94)$. Ana, Iva i Dora mogu promijeniti brojeve na kartici prema sljedećem pravilu:
Ana mijenja brojeve (a, b) u $(a-b, b)$, Iva mijenja brojeve (a, b) u $(a+b, b)$, Dora mijenja brojeve (a, b) u (b, a).
Svaki put kad djevojka dobije karticu napravit će svoju operaciju zamjene najmanje jednom (ili možda i više puta) prije nego dade svoju karticu drugoj djevojci da napravi njezinu zamjenu (možda i više puta).
Jeli moguće dobiti na kartici brojeve: a)$(19, 95)$ ili b) (19,96)?

Zadatak 1.
Na drvetu je 1000 zlatnih jabuka. Svake noći zmaj pojede dvije jabuke. Postoji li dan kada će na drvetu biti točno 5 jabuka?

Zadatak 2.
Tina igra sljedeću igru. Na ploči su zapisani brojevi (3,6). Zapisane brojeve može mijenjati na sljedeće načine:
$(a,b) \to \left(\frac{4}{3}a+\frac{1}{6}b, -\frac{1}{3}a+\frac{5}{6}b\right)$ ili $(a,b) \to \left(\frac{1}{2}a-5b, \frac{1}{2}a+6b\right)$ ili $(a,b) \to (b,a)$.
Može li Tina dobiti brojeve $\left(\frac{5}{9}, \frac{5}{12}\right)$?

Zadatak 3.
Prirodni brojevi od 1 do 99 ispisani su redom kao niz brojeva. Maja obriše dva od tih brojeva i na kraju niza zapiše njihovu razliku. Nakon toga Maja nastavi isti postupak brisanja dva broja i zapisivanja razlike na kraju niza sve dok ne ostane samo jedan broj. Hoće li zadnji broj biti paran ili neparan?

Zadatak 4.
Može li se ploča 10×10 prekriti s 25 pravokutnih blokova veličine 4×1?

Zadatak 5.
Na nekom je otoku 13 bijelih, 15 zelenih i 17 crvenih kameleona. Kad se dva kameleona različitih boja dotaknu njihova se boja promjenu u treću, preostalu boju. Mogu li nakon niza promjena svi kameleoni postati bijeli?

Zadatak 6.
Lea ima kutiju, napunjenu s osam manjih kutija. Neke su od njih prazne, a neke su također napunjene s osam manjih kutija itd. Može li broj praznih kutija pri ovakvoj konfiguraciji kutija (bez obzira na njihovu veličinu) biti 1000?

Zadatak 7.
U nekom su poligonu povučene dijagonale. Za neki vrh kažemo da je paran ako iz njega izlazi paran broj dijagonala, a neparan ako iz njega izlazi neparan broj dijagonala. Pokažite da je ukupan broj neparnih vrhova paran broj. (Nulu smatramo parnim brojem).

Zadatak 8.
Može li se ploča 8×8 prekriti s 16 blokova po 4 polja, od kojih je jedan kvadrat, a ostali su u obliku slova L?

Zadaci za vježbu:

1. U autobusu je 11 osoba. Na svakoj stanici izađe 3 osobe, a uđe 5 novih osoba. Postoji li stanica nakon koje će u autobusu biti točno 100 osoba?

2. Hrabri je vitez sreo još jednog zmaja s tri glave i opet odlučio odrezati sve njegove glave. Ovaj put je nakon što bi vitez odrezao glavu, na tom mjestu izraslo 8 novih glava. No on je i dalje rezao dok nije nabrojio 2017 glava. Je li dobro izbrojao?

3. Dan je niz brojeva $2,2,3,4,4$. U svakom koraku možemo izabrati dva od njih a i b te ih zamijeniti s $2a - b$ i $2b - a$.
   a) Može li se u nekom koraku dobiti niz brojeva 0, 2, 3, 4, 6?
   b) Može li se u nekom koraku dobiti 2, 2, 3, 4, 6?

4. Deset se žetona nalazi u vrhovima deseterokuta. Pri svakom potezu možemo izabrati dva žetona i pomaknuti ih u susjedni vrh. Možemo li sakupiti sve žetone u jednom vrhu?

5. Kutija sadrži 36 bočica. 19 ih je puno, a ostale su prazne. Uzimamo dvije bočice (slučajno) i ako je točno jedna od njih puna vraćamo je u kutiju. Ako su obje prazne, vraćamo jednu u kutiju. Ako su obje pune, jednu ispraznimo i vratimo je u kutiju. Postupak ponavljamo sve dok jedna bočica ne ostane u kutiji. Je li ta bočica puna?

6. U krugu je zapisano 2015 nula i jedna jedinica. U svakom koraku možete dodati 1 trima uzastopnim brojevima u krugu. Možete li postići da svi brojevi postanu jednaki?

7. Zmaj ima 2010 glava. Vitez može jednim udarcem mača odsjeći 2, 17, 21 ili 33 glave, ali odmah nakon toga zmaju redom izraste novih 9, 10, 0 ili 47 glava.
   Može li zmaj ostati bez ijedne glave? (*Županijsko natjecanje, 1. razred, B var., 2010.*)

8. Ploča 3×3 popunjena je redom brojevima 0, 1, 2, 3,...,8 (u prvom redu 0,1,2,drugom 3,4,5...). U svakom koraku odaberemo dva susjedna broja, umanjimo ih za vrijednost manjeg, a ostale ne diramo. Mogu li se ovim postupkom dobiti same nule na ploči?

9. Na ploču 10×10 postavljeno je 50 žetona; 25 žetona dolje lijevo i 25 gore desno. Žeton se premješta tako da preskoči susjedni žeton i stane na prazno polje iza njega.
   Je li moguće premjestiti svih 50 žetona na donju polovicu ploče? (*Županijsko natjecanje, 1. razred, A var., 2010.*)

10. 10×10 pravokutna parcela zemljišta podijeljena na 100 jediničnih parcela. Osam je jediničnih parcela zaraslo u korov. Ukoliko neka jedinična parcela ima barem dvije susjedne koje su zarasle u korov, onda i ona zaraste u korov. Može li se dogoditi da cijela parcela zaraste u korov?