

IMO pripreme 2019.

G

5. 6. 2019.

- 1. zadatak:** Kružnice ω i ω' sijeku se u točkama A i B . Tangenta na kružnicu ω u A siječe ω' u C i tangenta na kružnicu ω' u A siječe ω u D . Neka unutarnja simetrala $\angle CAD$ siječe ω i ω' u E i F , redom, a vanjska simetrala $\angle CAD$ siječe ω i ω' u X i Y , redom. Dokaži da je simetrala dužine XY tangenta na opisanu kružnicu $\triangle BEF$.
- 2. zadatak:** Neka su w_1 i w_2 dvije kružnice takve da $w_1 \cap w_2 = \{A, B\}$. Neka su X točka na w_2 i Y na w_1 takve da $BY \perp BX$. Neka je O središte opisane kružnice w_1 i $X' = w_2 \cap OX$. Ako je $K = w_2 \cap X'Y$ dokaži da je X polovište luka AK .
- 3. zadatak:** Neka je ABC šiljastokutan trokut. Točke M i N se nalaze na stranicama AB i AC redom. Kružnice s promjerima BN i CM sijeku se u točkama P i Q . Dokaži da su P , Q , i ortocentar H kolinearni.
- 4. zadatak:** U konveksnom četverokutu $ABCD$, P je sjecište pravaca AD i BC . Neka su I_1 i I_2 središta upisanih kružnica $\triangle PAB$ i $\triangle PDC$, redom. Neka je O središte opisane kružnice $\triangle PAB$ i H ortocentar $\triangle PDC$. Pokaži da su opisane kružnice $\triangle AI_1B$ i $\triangle DHC$ tangencijalne ako i samo ako su opisane kružnice $\triangle AOB$ and $\triangle DI_2C$ tangencijalne.
- 5. zadatak:** Neka je $\triangle ABC$ trokut s ortocentrom H . Tangente iz A na kružnicu s promjerom \overline{BC} dodiruju tu kružnicu u P i Q . Dokaži da su točke H, P i Q kolinearne.
- 6. zadatak:** Neka je ABC trokut i $\angle CAB > \angle ABC$ te neka je I središte njemu opisane kružnice. Neka je D točka na stranici \overline{BC} takva da je $\angle CAD = \angle ABC$. Neka je ω kružnica koja dodiruje AC u A i prolazi točkom I . Neka je X drugo sjecište ω i opisane kružnice $\triangle ABC$. Dokaži da se simetrale kuteva $\angle DAB$ i $\angle CXB$ sijeku na pravcu BC .