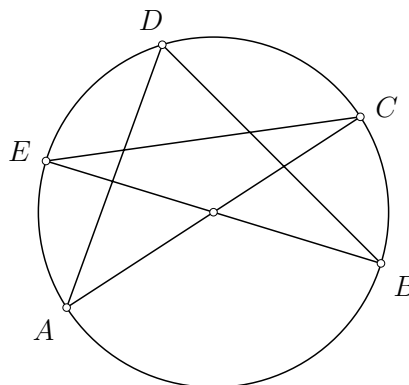


# Ljetne pripreme - Tetivni četverokuti

Matija Bašić, Ana Prlić

19. lipnja 2019.

1. Na kružnici je dano pet točaka kao na slici. Dužine  $\overline{AC}$  i  $\overline{BE}$  sijeku se u središtu kružnice. Ako je  $\sphericalangle DAC = 37^\circ$  i  $\sphericalangle EBD = 28^\circ$ , odredite kut  $\sphericalangle ACE$ .



2. Kružnice  $k_1$  i  $k_2$  sijeku se u točkama  $A$  i  $B$ . Tangenta kroz  $A$  na  $k_1$  siječe  $k_2$  u  $A$  i  $C$ . Paralela s  $AC$  kroz točku  $B$  siječe  $k_1$  i  $k_2$  redom u točkama  $D$  i  $E$ . Dokaži da je  $ADEC$  paralelogram.
3. Neka su  $A_1, B_1, C_1$  nožišta visina trokuta  $ABC$ . Dokažite da je ortocentar trokuta  $ABC$  središte kružnice upisane trokutima  $A_1B_1C_1$ .
4. Neka je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ . Na opisanoj kružnici tog trokuta odabrana je točka  $K$  takva da je  $\sphericalangle AKH = 90^\circ$ . Dokažite da pravac  $HK$  raspolavlja dužinu  $\overline{BC}$ .
5. Neka je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ . Dokaži da su kružnice opisane trokutima  $ABC, ABH, BCH$  i  $CAH$  sukladne.
6. Dokažite da se polovišta stranica, polovišta spojnice vrhova s ortocentrom i nožišta visina trokuta nalaze na istoj kružnici. Tu kružnicu nazivamo *Feuerbachova kružnica* ili *kružnica devet točaka*.
7. Kružnice  $k_1$  i  $k_2$  sijeku se u točkama  $A$  i  $B$ . Pravac  $l$  siječe kružnicu  $k_1$  u točkama  $C$  i  $E$ , a kružnicu  $k_2$  u točkama  $D$  i  $F$  tako da se točka  $D$  nalazi između  $C$  i  $E$ , a točka  $E$  između  $D$  i  $F$ . Pravci  $CA$  i  $BF$  sijeku se u točki  $G$ , a pravci  $DA$  i  $BE$  u točki  $H$ . Dokaži da je  $CF \parallel HG$ .
8. Dana je pokružnica sa središtem  $O$  i promjerom  $\overline{AB}$ . Pravac  $p$  siječe pravac  $AB$  u točki  $M$ , a polukružnicu u točkama  $C$  i  $D$  tako da je  $|MB| < |MA|$  i  $|MD| < |MC|$ . Točka  $K$  je drugi presjek kružnica opisanih trokutima  $AOC$  i  $BOD$ . Dokaži da je  $\sphericalangle MKO = 90^\circ$ .
9. Dokaži da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici tog trokuta.

10. Na stranici  $\overline{AC}$  trokuta  $ABC$  nalaze se točke  $D$  i  $E$  tako da je točka  $D$  između  $C$  i  $E$ . Neka je  $F$  sjecište kružnice opisane trokutu  $ABD$  s pravcem koji prolazi kroz točku  $E$  i paralelan je s  $BC$  tako da se točke  $E$  i  $F$  nalaze s različitih strana pravca  $AB$ . Neka je  $G$  sjecište kružnice opisane trokutu  $BCD$  s pravcem koji prolazi kroz točku  $E$  i paralelan je s  $AB$  tako da se točke  $E$  i  $G$  nalaze s različitih strana pravca  $BC$ . Dokaži da točke  $D$ ,  $E$ ,  $F$  i  $G$  leže na istoj kružnici.
11. Simetrala kuta  $\sphericalangle BAC$  u trokutu  $ABC$  siječe nasuprotnu stranicu u točki  $S$ . Točka  $T$  je polovište stranice  $\overline{BC}$ . Kružnica opisana trokutu  $AST$  siječe stranicu  $\overline{AB}$  u točki  $D$ , a stranicu  $\overline{AC}$  u točki  $E$ . Dokažite da je  $|BD| = |CE|$ .
12. Neka je  $D$  polovište stranice  $\overline{BC}$  trokuta  $ABC$  i neka je  $E$  točka na stranici  $\overline{AC}$  takva da je  $\sphericalangle EDA = \sphericalangle ABC$ . Točkom  $E$  povučena je paralela s  $\overline{BC}$  koja siječe  $\overline{AD}$  u točki  $F$ . Dokažite da je  $|AF| \cdot |DF| = |EF|^2$ .
13. Na stranicama  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  trokuta  $ABC$  dane su redom točke  $D$  i  $E$  takve da su pravci  $BC$  i  $DE$  paralelni, a unutar trokuta  $ADE$  je dana točka  $P$ . Pravac  $DE$  siječe pravce  $PB$  i  $PC$  redom u točkama  $F$  i  $G$ . Ako su  $O_1$  i  $O_2$  središta kružnica opisanih trokutima  $DPG$  i  $EPF$ , dokaži da su pravci  $AP$  i  $O_1O_2$  okomiti.
14. U šiljastokutnom trokutu  $ABC$  vrijedi  $|BC| < |AC|$ . Neka je  $M$  polovište stranice  $\overline{AB}$ , a neka su  $D$  i  $E$  redom nožišta visina iz vrhova  $A$  i  $B$ . Neka je  $H$  ortocentar, a  $R$  presjek pravaca  $DE$  i  $AB$ . Dokaži da su pravci  $CM$  i  $RH$  okomiti.