

MEMO pripreme 2019.

Potencija točke
Tadej Petar Tukara

11. 6. 2019.

- 1. zadatak:** U paralelogramu $ABCD$ vrijedi $AB < BC$. Točke P i Q se nalaze na stranicama BC i CD redom tako da je $CP = CQ$. Dokaži da opisana kružnica trokuta APQ prolazi kroz fiksnu točku bez obzira na odabir točaka P i Q .
- 2. zadatak:** Neka je ω_1 tangencijalna iznutra s ω_2 u točki N . Za neku točku K na ω_1 povučena je tangenta AB na ω_1 u K koja presjeca ω_2 u A i B . Neka je M polovište luka AB tako da se M i N nalaziste sa suprotnih strana pravca AB . Dokaži da radijus opisane kružnice trokuta KBM ne ovisi o odabiru točke K .
- 3. zadatak:** Neka se A , B i C točke na kružnici Γ sa središtem u O . Pretpostavimo da je $\angle ABC > 90$. Neka je D presjek pravca AB s okomicom na AC u točki C . Neka je l pravac kroz D okomit na AO . Neka je E sjecište pravaca l i AC , te F sjecište Γ i l između D i E . Dokaži da se opisane kružnice BFE i CFD dodiruju u točki F .
- 4. zadatak:** Dokaži da vrijedi Eulerov identitet: $OI^2 = R(R - 2r)$.
- 5. zadatak:** Neka su D i E točke na stranicama AB i AC trokuta ABC , redom, takve da je DE paralelan s BC i P točka unutar trokuta ADE . Neka su F i G redom sjecišta DE s pravcima BP i CP . Neka je Q drugo sjecište opisanih kružnice trokuta PDG i PFE . Dokaži da su točke A , P i Q kolinearne.
- 6. zadatak:** Neka su A , B , C i D redom četiri različite točke na pravcu. Kružnice polumjera AC i BD sijeku se u X i Y . Pravac XY siječe BC u Z . Neka je P točka na pravcu XY različita od Z . Pravac CP siječe kružnicu s promjerom AC u C i M , a pravac BP siječe kružnicu s promjerom BD u B i N . Dokaži da su pravci AM , DN , i XY konkurentni.
- 7. zadatak:** Neka je $\triangle ABC$ raznostraničan trokut sa središtem upisane kružnice I i opisanom kružnicom ω . Pravci AI , BI , CI sijeku kružnicu ω drugi put u točkama D , E i F , redom. Paralele kroz I sa stranicama BC , AC , AB sijeku pravce EF , DF , DE u točkama K , L , M , redom. Dokaži da su točke K , L , M kolinearne.
- 8. zadatak:** Neka je ABC šiljastokutan trokut. Kružnica s promjerom BC siječe AB i AC u E i F , redom. M je polovište BC i P je sjecište AM i EF . X je proizvoljna točka na kraćem luku EF i Y je drugo sjecište XP sa kružnicom promjera BC . Dokaži: $\angle XAY = \angle XYM$.
- 9. zadatak:** Neka je ABC šiljastokutan trokut s $AB < AC$. Dokaži da postoji točka sa sljedećim svojstvom: za svake dvije različite točke X i Y u unutrašnjosti $\triangle ABC$ za koje vrijedi da su točke B , C , X i Y na kružnici i vrijedi identitet $\angle AXB - \angle ACB = \angle CYA - \angle CBA$ pravac XY prolazi kroz D

10. zadatak: Kružnice ω_1 i ω_2 sijeku se u točkama X i Y , neka je ℓ_1 pravac kroz središte kružnice ω_1 koji siječe ω_2 u točkama P i Q i neka je ℓ_2 pravac kroz središte kružnice ω_2 koji siječe ω_1 u točkama R i S . Dokaži da, ako točke P, Q, R i S leže na kružnici, onda središte te kružnice leži na pravcu XY .