Memo pripreme - Geometrija

Vlatko Crnković

7. lipanj 2019.

1 Lagani zadatci

1. Dan je šiljstokutan trokut $\triangle ABC$ takav da je $|AB| < |AC|$. Neka je D nožište visine iz A te točke E i F nožišta okomica iz D na AB i AC redom. Ako je H drugo sjecište pravca AD s kružnicom opisanom trokutu $\triangle ABC$, a G sjecište pravaca EF i AD, dokaži da je $|AG| \cdot |AH| = |AD|^2$.

2. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut, ω njemu upisana kružnica te E sjecište dijagonale $\overline{AC}$ s ω (bliže vrhu A). Neka je F točka dijametralno suprotna E na ω te p tangenta na ω u F. A_1, C_1, C_2 i A_2 su redom sjecišta p s AB, BC, CD i AD. Dokaži da je $|A_1C_1| = |A_2C_2|$.

3. Dana je kružnica ω. Točke A, B, C i D leže na njoj tim redom tako da je $\overline{AD}$ promjer. Također vrijedi $|AB| = |BC| = a$ i $|CD| = c$, gdje su a i c relativno prosti prirodni brojevi. Ako je duljina promjera d također prirodan broj, dokaži da je d ili $2d$ potpun kvadrat.

2 Zadatci

1. Dan je trokut $\triangle ABC$. Simetrala unutarnjeg kuta pri vrhu A siječe BC u D i opisanu kružnicu u E. Neka su K, L, M i N redom polovišta dužina $\overline{AB}, \overline{BD}, \overline{DC}$ i $\overline{CA}$ te P i Q redom središta opisanih kružnica trokutima $\triangle KLE$ i $\triangle MNE$. Dokaži da je $\angle PEQ = \angle BAC$.

2. Dan je trokut $\triangle ABC$ takav da je $\angle ABC = 60°$. Neka su I i O redom središte upisane i opisane kružnice tog trokuta te neka je M polovište luka BC na opisanoj kružnici koji ne sadrži točku A. Ako je $|BM| = |IO|$, odredi mjeru kuta $\angle BAC$.

3. Neka je P točka unutar šiljastog kuta $\angle BAC$ takva da je $\angle PBA = \angle PCA = 90°$. Točke D i E su redom na dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ takve da je $|BD| = |BP|$ i $|CE| = |CP|$. Ako su F i G točke na krakovima AC i AB redom, takve da je $\angle ADF = \angle AEG = 90°$, dokaži da je $|PF| = |PG|$.

3 Malo teži zadatci

1. Visine BB_1 i CC_1 trokuta $\triangle ABC$ sijeku se u ortocentru H. Neka su točke B_2 i C_2 redom na dužinama BH i CH takve da je $BB_2 = HB_1$ i $CC_2 = HC_1$. Kružnice opisane trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle B_2HC_2$ sijeku se u točkama D i E. Dokaži da je trokut $\triangle DEH$ pravokutan.

2. Neka su ω_1 i ω_2 dvije kružnica u ravnini koje se ne sijeku niti leže jedna u drugoj. Neka su $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{A_2B_2}$ redom promjeri tih kružnica takvi da se dužine $\overline{A_1A_2}$ i $\overline{B_1B_2}$ sijeku. Nadalje, neka su A i B redom polovišta dužina $\overline{A_1A_2}$ i $\overline{B_1B_2}$, C njihovo sjecište, te H ortocentar trokuta $\triangle ABC$. Dokaži da se točka H nalazi na fiksnom pravcu koji ovisi samo o ω_1 i ω_2.

3. Dan je šiljastokutan trokut $\triangle ABC$, kojemu su H i I redom ortocentar i središte opisane kružnice, takav da kružnica opisana trokutu $\triangle BIC$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki P različitoj od B. Neka je K nožište okomice iz H na AI te Q centralnosimetrična slika točke P u odnosu na K. Dokaži da su točke B, H i Q kolinearne.