G - skrivena tema

Vlatko Crnković

1. Dan je trokut $\triangle ABC$. Neka je I središte njemu upisane kružnice, M polovište stranice $\overline{BC}$ te D dirałište upisane kružnice sa stranicom $\overline{BC}$. Dokaži da pravac MO prolazi polovištem dužine $\overline{AD}$.

2. Dan je trokut $\triangle ABC$. Kružnice α, β i γ jednakih radijusa diraju stranice unutarnjih kuteva pri vrhovima A, B i C redom. Kružnica δ dira sve tri kružnice izvana. Dokažite da središte kružnice δ te središta opisane i upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ leže na istom pravcu.

3. Dan je trokut $\triangle ABC$ i točka D na $\overline{BC}$ takva da je AD simetrala unutarnjeg kuta pri vrhu A. Neka su B_1 i C_1 nožišta okomica iz D na AC i AB redom te M polovište dužine B_1C_1. Dokaži da M leži na težišnici iz vrha A.

4. Dan je kvadrat $ABCD$ i točke P i Q na $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom takve da je $BP = BQ$. Ako je H nožište okomice iz B na PC, dokaži da je $\angle DHQ = 90^\circ$.

5. Kružnice S_1 i S_2 sijeku se u točkama A i B. Tetive $\overline{AM}$ i $\overline{AN}$ kružnica S_1 i S_2 redom tangentne su na drugu kružnicu. Neka je C točka takva da je $AMCN$ paralelogram te točke P i Q na $\overline{BN}$ i $\overline{MC}$ redom takve da je $\frac{BP}{PN} = \frac{MQ}{QC}$. Dokaži da je $\angle ANC = \angle APQ$.

6. Neka su P i Q centri homotetija. Dokaži da je kompozicija te dvije homotetije također homotetija s centrom na pravcu PQ.

7. Dan je konveksan četverokut $ABCD$ i točka P na $\overline{AB}$ takvi da kružnica ω dodiruje kružnice ω_a i ω_c u točkama K i L redom, gdje su ω, ω_a i ω_c redom kružnice upisane trokutima $\triangle CPD, \triangle APD$ i $\triangle BPC$. Ako je I središte od ω, E presjek dijagonala AC i BD te F presjek pravaca AK i BL, dokaži da su točke I, E i F kolinearne.