Geometrijske nejednakosti

Ljetne pripreme (18.6.2019.)

Kristijan Kilassa Kvaternik

Oznake

U trokutu ABC označimo:

- $a, b, c \ldots$ duljine stranica nasuprot vrhova A, B, C redom,
- $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ mjere unutarnjih kutova u vrhovima A, B, C redom,
- $h_a, h_b, h_c \ldots$ duljine visina iz vrhova A, B, C redom,
- $t_a, t_b, t_c \ldots$ duljine težišnica iz vrhova A, B, C redom,
- $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma \ldots$ duljine dijelova simetrala kutova α, β, γ redom koji leže unutar trokuta,
- $s \ldots$ poluopseg,
- $R, r \ldots$ radijusi opisane i upisane kružnice redom.

Neke činjenice i rezultati

(1) Nejednakost trokuta.
U svakom je (nedegeneriranom) trokutu zbroj duljina bilo koje dvije stranice strogo veći od duljine treće:

$$a < b + c, \;\; b < c + a, \;\; c < a + b.$$

Općenito, ako su A, B, C tri točke u ravnini, vrijedi

$$|AC| \leqslant |AB| + |BC|.$$

U kojem se slučaju postiže jednakost?

(2) Površina trokuta.
Ako je P površina trokuta ABC, imamo

$$P = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4R} = \ldots$$

Pritom vrijede i formule koje dobivamo cikličnom zamjenom.

(3) Eulerova relacija paralelograma.
Ako su a, b duljine stranica paralelograma, a e, f duljine njegovih dijagonala, vrijedi

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

(4) Ptolomejev teorem.
Ako su a, b, c, d duljine stranica tetivnog četverokuta (u tom poretku), a e, f duljine njegovih dijagonala, vrijedi

$$ac + bd = ef.$$

(5) Nejednakosti među sredinama.
Za nenegativne realne brojeve $a_1, \ldots, a_n$ definiramo njihovu

- $\rightsquigarrow$ **aritmetičku sredinu** $A(a_1, \ldots, a_n) = \dfrac{a_1 \ldots + a_n}{n}$,
- $\rightsquigarrow$ **geometrijsku sredinu** $G(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$,
- $\rightsquigarrow$ **harmonijsku sredinu** $H(a_1, \ldots, a_n) = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$,
- $\rightsquigarrow$ **kvadratnu sredinu** $K(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$.

Za navedene sredine vrijedi sljedeća nejednakost

$$H(a_1, \ldots, a_n) \leqslant G(a_1, \ldots, a_n) \leqslant A(a_1, \ldots, a_n) \leqslant K(a_1, \ldots, a_n).$$

Jednakost se u navedenoj nejednakosti postiže ako i samo ako je $a_1 = \ldots = a_n$.

(6) Cauchy-Schwarzova nejednakost.
Neka su $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ proizvoljni realni brojevi. Tada vrijedi nejednakost

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2.$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su n-torke $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ proporcionalne, tj. postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$a_i = \lambda b_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

Geometrijska supstitucija
Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, možemo uvesti supstituciju

$$a = x + y, \ b = y + z, \ c = z + x.$$

Tada imamo $x = s - c$, $y = s - b$, $z = s - a$ (koja je geometrijska interpretacija ovih veličina?). Na ovaj način možemo neku geometrijsku nejednakost svesti na drugi oblik u kojem ju je jednostavnije dokazati.
Izrazite i preostale veličine trokuta $(s, r, R, \ldots)$ pomoću x, y, z.

Zadaci

1. Dokaži da u pravokutnom trokutu s duljinom hipotenuze c vrijedi

$$a^3 + b^3 < c^3.$$

2. Dokaži da u trokutu vrijedi

$$\frac{3}{2}s < t_a + t_b + t_c < 2s.$$

3. Dana je funkcija

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 8x + 32}.$$

Odredi, ako postoji, minimum funkcije f, $\min\{f(x) | x \in \mathbb{R}\}$. Za koje $x \in \mathbb{R}$ se taj minimum postiže (ako postoji)?

4. Neka su a, b, c, d duljine stranica četverokuta (u tom poretku). Ako je P površina tog četverokuta, dokaži nejednakosti:

(a) $P \leqslant \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$,

(b) $P \leqslant \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

5. Dokaži da u trokutu vrijedi

$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

6. Dokaži da u trokutu opsega 2 vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

7. Dokaži da u trokutu vrijedi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2r}.$$

8. Dokaži da u trokutu vrijedi

$$a^2 b(a-b) + b^2 c(b-c) + c^2 a(c-a) \geqslant 0.$$

9. Dokaži da u trokutu vrijedi

$$\frac{a}{s_a} + \frac{b}{s_b} + \frac{c}{s_c} \geqslant \frac{9\sqrt{3}}{\pi},$$

gdje su s_a, s_b, s_c duljine lukova upisane kružnice između dirališta sa stranicama trokuta koji ne sadrže dirališta sa stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ redom.

10. Dokaži da u trokutu vrijedi

$$at_a + bt_b + ct_c \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

11. Dokaži da u trokutu vrijedi:

(a) $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$,

(b) $9r \leqslant h_a + h_b + h_c$.
Dokaži ovu nejednakost sa i bez korištenja (a) dijela zadatka.

12. Dokaži da u trokutu vrijedi

$$\frac{s_\alpha}{a} + \frac{s_\beta}{b} + \frac{s_\gamma}{c} \leqslant \frac{s}{2r}.$$

13. Ako za četverokut $ABCD$ čiji vrhovi leže na kružnici polumjera 1 vrijedi

$$|AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| \geqslant 4,$$

dokaži da je tada taj četverokut kvadrat.

14. Neka je $ABCDEF$ konveksni šesterokut takav da

$$|AB| = |BC| = |CD|, \; |DE| = |EF| = |FA|, \; \measuredangle BCD = \measuredangle EFA = 60^\circ.$$

Nadalje, neka su G, H dvije točke u unutrašnjosti tog šesterokuta takve da

$$\measuredangle AGB = \measuredangle DHE = 120^\circ.$$

Dokaži

$$|AG| + |GB| + |GH| + |DH| + |HE| \geqslant |CF|.$$