

IMO pripreme 2019 – Funkcijske jednačbe

sastavio: Lukas Novak

12. 6. 2019.

1. Nađi sve funkcije $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ takve da za sve x, y iz domene vrijedi:

$$f(x + f(x) + 2y) = 2x + f(2f(y)).$$

2. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve x, y realne vrijedi:

$$4xyf(x^2 - y^2) = (x^2 - y^2)f(2x)f(2y).$$

3. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takve da za sve x, y iz domene vrijedi:

$$f(x + yf(x) + y^2) = f(x) + 2y.$$

4. Nađi sve funkcije $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ za koje je $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ i za sve a, b iz domene vrijedi:

$$(f(ab))^2 = (af(b) + f(a))(bf(a) + f(b)).$$

5. Nađi sve funkcije $\theta : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}$ takve da za sve polinome p, q iz $\mathbb{Z}[x]$ vrijede ove dvije tvrdnje:

$$\theta(p + 1) = \theta(p) + 1,$$

$$\theta(p) \neq 0 \Rightarrow \theta(p) \mid \theta(p \cdot q).$$

6. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takve da je za sve x, y iz domene:

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1).$$

7. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve realne x i y vrijedi:

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x).$$

8. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takve da za sve pozitivne realne x i y vrijedi:

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y).$$

9. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve realne x i y vrijedi:

$$(x + y)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x + y).$$

10. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve realne x i y vrijedi:

$$f(x + xy + f(y)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right) \left(f(y) + \frac{1}{2}\right).$$

11. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve x i y iz domene vrijedi:

$$f(xf(y) + yf(x)) = x^2 + y^2.$$

12. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve realne x i y vrijedi:

$$f(x + f(x)f(y)) = f(x) + xf(y).$$

Linkovi na hintove i rješenja

1. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h378715>
2. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1813379p12089293>
3. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1843613p12399268>
4. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h331738>
5. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1664161p10570981>
6. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h534834p3066172>
7. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1113162p5083463>
8. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h211465p1165901>
9. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h224951p1249246>
10. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h347727p1864141>
11. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h1557983p9511802>
12. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h132331>