# *Djeljivost*

**Poučak o dijeljenju**

Za svaka dva cijela broja $a$ i $b$, $b \neq 0$ postoje jedinstveni cijeli brojevi $q$ i $r$ tako da vrijedi $a = bq + r, 0 \leq r < b$.

| **Izjava** | **Obrazloženje - dokaz, primjer, kontra primjer, „popravak" tvrdnje** |
|---|---|
| 1. Broj $2^n \cdot 5^n + 1988$ je djeljiv s 18.<br><br>☐ uvijek ☐ ponekad ☐ nikad | |
| 2. Ako $x \mid y$ onda $\frac{y}{x} \mid y$.<br><br>☐ uvijek ☐ ponekad ☐ nikad | |
| 3. Prirodan broj $n$ ima paran broj djelitelja.<br><br>☐ uvijek ☐ ponekad ☐ nikad | |
| 4. Za sve prirodne brojeve $n$, broj $n(n+1)$ je djeljiv s 2, a broj $n(n+1)(n+2)$ s 3.<br><br>☐ uvijek ☐ ponekad ☐ nikad | |
| 5. Ako $a \mid n$ i $b \mid n$ tada $ab \mid n$.<br><br>☐ uvijek ☐ ponekad ☐ nikad | |
| 6. Za prirodan broj $n$ broj $n^2 + 1$ je djeljiv s 3.<br><br>☐ uvijek ☐ ponekad ☐ nikad | |
| 7. Ako $17 \mid (3a + 5b)$ tada $17 \mid (4a + b)$, za $a, b \in Z$.<br><br>☐ uvijek ☐ ponekad ☐ nikad | |

**Primjer**

Dvadeset je učenika prolazilo hodnikom gdje se nalaze 20 zatvorenih ormarića u nizu. Prvi je učenik otvorio sve ormariće, drugi je zatvorio sve ormariće s brojevima 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20; treći je ormariće s brojevima 3,6,9,12,15,18 otvorio ako su bili zatvoreni, odnosno zatvorio ako su bili otvoreni. I tako dalje redom svaki je $i$-ti učenik ormariće čiji je broj višekratnik od $i$ otvarao ako su bili zatvoreni ili zatvarao ako su bili otvoreni. Koji su ormarići ostali otvoreni nakon što su se svi studenti prošetali hodnikom?

Zadaci

1. Zadana su tri broja: prvi broj pri dijeljenju s 9 daje ostatak 6, drugi broj pri dijeljenju s 9 daje ostatak 4, a treći broj pri dijeljenju s 9 daje ostatak 5. Koliki ostatak pri dijeljenju s 9 daje njihov zbroj?
2. Odredite najveći cijeli broj koji pri dijeljenju sa 17 daje kvocijent 15.
3. Pokažite da se svaki cijeli broj može zapisati u jednom od oblika
   $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$.
4. Ako cijeli broj nije djeljiv s 3, pokažite da je onda njegov kvadrat umanjen za 1 djeljiv s 3.
5. Dokažite da $12 \mid \left(n^4 - n^2\right)$
6. Dokažite da je broj $2222^{5555} + 5555^{2222}$ djeljiv sa 7.
7. Odredite broj djelitelja brojeva 10, 27, 36, 108, 2040.
8. Ako je $n \in N, n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ rastav broja $n$ na proste faktore, odredite broj djelitelja broja $n$.
9. Odredite sve prirodne brojeve koji imaju točno 4 djelitelja, ako je umnožak svih djelitelja jednak 225.
10. Odredite najmanji prirodni broj koji ima točno 7 djelitelja.
11. Odredite prvi i drugi po veličini prirodni broj koji ima točno 8 djelitelja.
12. Odredite prirodan broj koji ima dva prosta djelitelja, broj svih djelitelja je 6, a zbroj svih djelitelja je 28.
13. Odredite najmanji prirodan broj $n$ koji je djeljiv s 3 i s 4 te ima točno 14 djelitelja.
14. Dokažite da je broj $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}} - 7^{7^{7^{7}}}$ djeljiv sa 10.
15. Odredite sve prirodne brojeve $n$ za koje su sva tri broja $3n - 4$, $4n - 5$ i $5n - 3$ prosti brojevi.