

# DIOFANTSKE JEDNADŽBE

Jednadžba s dvjema ili više nepoznanica čiji su koeficijenti i rješenja cijeli brojevi naziva se DIOFANTSKA JEDNADŽBA.

Linearne diofantske jednadžbe

$3x + 7y - 8 = 0$  nehomogena (s dvjema nepoznamicama  $x$  i  $y$ ),  $3x + 7y = 0$  pripadna homogena

$$6x + 2y - 11z = 14$$

Nelinearne diofantske jednadžbe

$$xy - 5x + y = 12$$

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

## METODE RJEŠAVANJA

- metoda kvocijenta
- metoda umnoška
- metoda posljednje znamenke
- metoda parnosti
- metoda nejednakosti

PRIMJER 1.

Odredimo sva cjelobrojna rješenja jednadžbe  $xyz = 2007$ .

PRIMJER 2.

Za prijevoz neke robe raspolažemo vrećama od 40 kg i 60 kg.

Koliko treba uzeti jednih, a koliko drugih da se prenese 500 kg robe?

## METODA KOLIČNIKA (METODA DIJELJENJA, METODA KVOCIJENTA)

Jednadžba se transformira tako, da se jedna nepoznanica izrazi kao racionalna funkcija druge nepoznanice, transformira u zbroj cijele i racionalne funkcije druge nepoznanice, a zatim se analizom druge funkcije izdvoje svi mogući slučajevi.

PRIMJERI:

1. Riješimo u skupu cijelih brojeva jednadžbu  $10x + 3y = 4$ .
2. Riješimo u skupu cijelih brojeva jednadžbu  $6x - 9y - 5 = 0$ .
3. Riješimo u skupu prirodnih brojeva jednadžbu  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ .
4. Riješimo u skupu cijelih brojeva jednadžbu  $xy + 2y = x$ .

ZADACI

1. Riješi u skupu cijelih brojeva jednadžbe:

a) $xy + 2x = 7$	b) $xy = x + y$
c) $xy + 3y - 5x = 18$	d) $7(x + y) = xy$
e) $xy + 3y^2 = 11$	f) $3x + 5y = 8$

## METODA UMNOŠKA (METODA FAKTORIZACIJE)

Primjenjuje se pri rješavanju nelinearnih diofantskih jednačbi.

Zadana diofantska jednačba transformira se u oblik kojem je jedna strana umnožak (i nepoznanice), a druga strana cijeli broj. Zatim se razmatraju svi mogući slučajevi za dobivene faktore.

PRIMJERI:

- Riješimo u skupu cijelih brojeva jednačbu  $x(x - 4y) = 5$ .
- Riješimo u skupu cijelih brojeva jednačbu  $xy + x - 3y - 6 = 0$ .
- Riješimo u skupu cijelih brojeva jednačbu  $6x^2 - 13xy + 6y^2 = 4$ .

ZADACI

- Riješi u skupu cijelih brojeva jednačbe:

a) $xy + 7x - 2y - 25 = 0$	b) $x^2 - 7 = 2xy$
c) $x^2 - 5xy + 6y^2 = 3$	d) $xyz + xy = x + xz + 3$

## METODA POSLJEDNJE ZNAMENKE

U zadanoj diofantskoj jednačbi odrede se posljednje znamenke brojeva na lijevoj i desnoj strani te se na temelju toga izvodi zaključak ima li jednačba cjelobrojno rješenje ili ne.

PRIMJERI:

- Riješimo u skupu cijelih brojeva jednačbu  $x^2 + 5y = 199519941993$ .
- Riješimo u skupu cijelih brojeva jednačbu  $x(x + 2) = 2016$ .

ZADACI

- Riješi u skupu cijelih brojeva jednačbe:

a) $10x + 20y + 30z = 2011$	b) $x^2(x^2 - 3) = 2012$
-----------------------------	--------------------------

## METODA PARNOSTI

U zadanoj diofantskoj jednačbi određuje se parnost jedne od nepoznanica i na temelju toga se zaključuje ima li jednačba cjelobrojno rješenje ili ne.

PRIMJERI:

- Odredimo sve proste brojeve  $p$  i sve cijele brojeve  $x$  za koje vrijedi  $13p + 4x^2 - 1470 = 0$ .
- Dokažimo da linearna jednačba  $(n^2 + n + 2)x + 2y = 1$  nema cjelobrojna rješenja  $x$  i  $y$  ni za jedan cijeli broj  $n$ .

## ZAADAACII

4. Odredi dvoznamenkasti broj koji je jednak dvostrukom umnošku svojih znamenki.
5. Nađi sve prirodne brojeve koji pri dijeljenju sa 17 daju ostatak 10, a pri dijeljenju s 13 ostatak 1.
6. Koje su godine rođene osobe koje su u 2005. navršile onoliko godina koliki je zbroj znamenaka godine njihova rođenja?
7. Odredi troznamenkasti broj koji je 18 puta veći od zbroja svojih znamenki.
8. Za pošiljke satova na raspolaganju su tri vrste kutija. U kutiju prve vrste može se složiti 65 satova, u kutiju druge vrste 35 satova, a u kutiju treće vrste 20 satova. Cijene prijevoza ovih kutija su redom 100 kn, 70 kn i 50 kn.  
Koje je kutije najbolje koristiti za pakiranje 500 satova da bi trošak prijevoza bio najmanji?
9. Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbe:

a) $xy + 4x - 5y = 40$	b) $21xy + 2(14x - 3y) - 288 = 0$
------------------------	-----------------------------------

10. Riješi u skupu cijelih brojeva jednadžbe:

a) $x^2 - xy + 2x - 2y + 3 = 0$	b) $2x^2 + xy - y^2 = 8$
---------------------------------	--------------------------

## ZADACI S NATJECANJA

11. 8. razred DRŽAVNO 1998.
12. 8. razred ŽUPANIJSKO 2012.
13. 8. razred ŽUPANIJSKO 2002.
14. 7. razred DRŽAVNO 1998.
15. 1. razred SŠ DRŽAVNO 1998.
16. 1. razred SŠ ŽUPANIJSKO 2001.
17. 1. razred SŠ ŠKOLSKO 2019.

**DIOPANTISKE JEDNADŽBE NA NATJECANJIMA**

1992.	Općinsko	8. razred	Odredi sve troznamenkaste prirodne brojeve koji su 12 puta veći od zbroja svojih znamenaka.
1992.	Državno	7. razred	Odredi sve parove cijelih brojeva $x$ i $y$ čiji je umnožak pet puta veći od njihovog zbroja.
1992.	Državno	1. razred SŠ	Ima li jednadžba $y^2 = x^2 + 1990$ cjelobrojno rješenje?
1993.	Općinsko	8. razred	Ako zbroju godina dvoje djece dodamo umnožak njihovih godina, dobiva se 34. Koliko godina ima svako dijete?
1994.	Državno	8. razred	Odredi sve cijele brojeve $a$ i $b$ za koje vrijede jednakosti $a^2 - 10b + 1 = 0$ i $b^2 + 14a + 73 = 0$ .
1994.	Državno	1. razred SŠ	Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4}$ .
1994.	Županijsko	8. razred	Odredi sve parove cijelih brojeva $x$ i $y$ za koje vrijedi $x^2 - 2x + y^2 = 0$ .
1995.	Općinsko	7. razred	Odredi sve dvoznamenkaste brojeve koji su za jedan manji od šesterostrukog zbroja svojih znamenki.
1995.	Županijsko	7. razred	Odredi parove cijelih brojeva $x$ i $y$ koji zadovoljavaju jednadžbu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$ .
1997.	Županijsko	7. razred	Na natjecanju iz matematike bilo je 140 učenika. Organizator natjecanja za svakog je natjecatelja pripremio po jedan sok. Sokovi su bili pakirani u paketima po 16, 17 ili 40 komada. Koliko je bilo kojih paketa?
1997.	Državno	8. razred	Odredi sve cijele brojeve $a$ , $b$ i $c$ za koje vrijede jednakosti: $a^2 + 2b^2 - 2bc = 121$ i $2ab - c^2 = 121$ .
1998.	Državno	7. razred	U vagonu se nalazi 1 tona krumpira koji treba pretovariti u kamion. Posao obavlja jedan radnik, a na raspolaganju su mu vreće od 60 kg i 80 kg. Odjednom može prenijeti samo jednu punu vreću krumpira. Koliko kojih vreća radnik mora uporabiti ako posao želi obaviti s najmanjim brojem prenošenja? Prenose se samo do kraja napunjene vreće i sav krumpir mora biti pretovaren.
1998.	Državno	8. razred	Koliko ima uređenih parova $(x, y)$ troznamenkastih prirodnih brojeva koji su rješenja jednadžbe $3x + 4y = 1998$ ?
1998.	Državno	1. razred SŠ	Nađite sve prirodne brojeve $m$ i $n$ koji zadovoljavaju jednadžbu $10(m + n) = mn$ .
1999.	Državno	7. razred	Koje je godine ovog stoljeća rođena osoba, koja će 1999. godine navršiti onoliko godina koliki je dvostruki zbroj znamenki godine njezinog dvadesetog rođendana?
1999.	Državno	8. razred	Odredi sve cijele brojeve $n$ za koje je $\sqrt{n^2 + 4n - 5}$ također cijeli broj.
2001.	Županijsko	1. razred SŠ	Postoji li cijeli broj $x$ za koji su oba broja $\frac{14x+5}{9}$ i $\frac{17x-5}{12}$ cijela?
2002.	Županijsko	8. razred	Na koliko načina može prodavač točno izvagati glavicu kupusa mase 1.67 kg ako na raspolaganju ima samo utege masa 20 g i 50 g?
2003.	Županijsko	8. razred	Odredi sve uređene parove $(x, y)$ cijelih brojeva za koje vrijedi jednakost $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ .
2005.	Županijsko	8. razred	Odredi sve prirodne brojeve $n$ tako da broj $\sqrt{\frac{n+36}{n-36}}$ bude isto prirodan broj.
2008.	Županijsko	8. razred	Izračunaj vrijednost izraza $x^{2008} + 2008y$ ako je $x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 10 = 0$ .
2009.	Državno	8. razred	Odredi sve uređene parove $(x, y)$ prirodnih brojeva takvih da je $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy + x + y}$ .
2010.	Državno	8. razred	Odredi sve prirodne brojeve $a$ tako da broj $\sqrt{\frac{a+12}{a-12}}$ bude također prirodan broj.
2010.	Županijsko	7. razred	Koliko parova $(x, y)$ troznamenkastih prirodnih brojeva zadovoljava uvjet $15x + 3y = 2010$ ?
2011.	Županijsko	7. razred	Odredi parove cijelih brojeva $x$ i $y$ za koje vrijedi $xy - 7x - y = 3$ .

2012.	Državno	8. razred	Odredi sve parove $(x, y)$ cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu: $xy + 3y = x^2 + 6x + 12$ .
2012.	Županijsko	8. razred	Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva: $x^2 - xy - 2y^2 = 27$ .
2013.	Županijsko	8. razred	Postoje li cijeli brojevi $x$ i $y$ za koje vrijedi da je $x^2 + 2012 = y^2$ ? Obrazloži svoju tvrdnju. Ako postoje takvi brojevi, odredi ih sve.
2013.	Županijsko	7. razred	Dokaži da jednadžba $n(n - 5) = 408408408$ nema rješenje u skupu cijelih brojeva.
2014.	Županijsko	7. razred	U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbu $xy - 3x + y = 5$ .
2015.	Državno	8. razred	U skupu prirodnih brojeva riješi jednadžbu $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{48}$ .
2015.	Županijsko	8. razred	Odredi sve prirodne brojeve $x$ i $y$ ako je $x^2 - 1 = y^2 + 2014$ .
2018.	Županijsko	8. razred	Odredi sve prirodne brojeve $a$ takve da je broj $\sqrt{\frac{a+64}{a-64}}$ također prirodan broj.
2018.	Državno	7. razred	Nađi sve parove $(m, n)$ prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu $2mn - 5m + 3n = 130$ .
2019.	Školsko	1. razred SŠ	Odredi sve parove $(m, n)$ cijelih brojeva za koje vrijedi $mn + 5m + 2n = 121$ .