

## Diofantske jednadžbe

Napomena: ovi su zadatci korišteni za pripreme JBMO ekipe. S obzirom na namjenu, namjerno nisu složeni redom prema metodama koje se koriste za njihovo rješavanje. Što se težine zadataka tiče, zadatci nisu u potpunosti složeni ni prema težini, ali su ipak lakši zadatci većinom među početnim zadatcima, a oni teži su na kraju.

1. Dokaži da ne postoji prirodan broj  $n$  takav da je  $n^3 - n + 2$  potpun kvadrat.
2. Nađi sve uređene parove  $(m, n)$  prirodnih brojeva takve da je

$$15(m + n) = 2mn.$$

3. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi  $m$  i  $n$  za koje je
  - a) razlika kvadrata jednaka 987654,
  - b) razlika kubova jednaka 987654.
4. Koliko ima trojki  $(a, b, c)$  prirodnih brojeva za koje je  $a \geq b \geq c$  koji zadovoljavaju jednadžbu  $abc + a + b + c = ab + bc + ca + 1000$ ?
5. Nađi sve uređene parove  $(m, n)$  cijelih brojeva takve da je

$$m^2 = 2n^2 - 75n + 5.$$

6. Nađi sve prirodne brojeve  $x, y, z$  takve da je

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}.$$

7. Može li zbroj kvadrata 3 uzastopna prirodna broja biti kvadrat nekog prirodnog broja?
8. a) Postoje li tri neparna prirodna broja čiji je zbroj kvadrata jednak kvadratu nekog prirodnog broja?  
b) Postoji li pet neparnih prirodnih brojeva čiji je zbroj kvadrata jednak kvadratu nekog prirodnog broja?
9. Nađi sve prirodne brojeve  $x, y, z$  takve da je

$$x^2y + y^2z + z^2x = 3xyz.$$

10. Neka su  $m$  i  $n$  prirodni brojevi različite parnosti. Dokaži da tada

$$(m + 3n)(5m + 7n)(7m + 5n)(3m + n)$$

nije kvadrat prirodnog broja.

11. Nađi sve uređene parove  $(m, n)$  cijelih brojeva takvih da je

$$(mn - 7)^2 = m^2 + n^2.$$

12. Nađi sve uređene parove  $(m, n)$  cijelih brojeva takvih da je

$$m^3 + 3 = 4n(n + 1).$$

13. Nađi sve uređene parove  $(m, n)$  cijelih brojeva takve da je

$$m^2 + m = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n.$$

14. Nađi sve uređene parove  $(m, n)$  prirodnih brojeva takve da je

$$m(m - 4n) = n - 4.$$

15. Nađi sve uređene parove  $(m, n)$  cijelih brojeva takve da je

$$(m + n)^2 = m^3 + n^3.$$

16. Nađi sve prirodne brojeve  $n$  za koje je  $n^2 + 2019n$  kvadrat prirodnog broja.

17. Neka su  $m$  i  $n$  međusobni različiti prirodni brojevi. Dokaži da  $\frac{m^2n+1}{m+1}$  i  $\frac{mn^2+1}{n+1}$  ne mogu oba biti prirodni brojevi.

18. Nađi sve uređene parove  $(m, n)$  prirodnih brojeva takve da je

$$3^m = 2^n - 7.$$

19. Nađi sve prirodne brojeve  $m, n, p$  takve da je

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right) = 2.$$

20. (HMO 2017.) Nađi sve uređene parove  $(m, n)$  prirodnih brojeva takve da je

$$5m^3 = 27n^4 - 2n^2 + n.$$

21. (HMO 2015.) Nađi sve uređene parove  $(x, y)$  prirodnih brojeva takve da je

$$x(x^2 + 19) = y(y^2 - 10).$$

22. Nađi sve prirodne brojeve  $x, y, z$  takve da je

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1.$$

23. Nađi sve parove cijelih brojeva  $(x, y)$  takvih da je

$$x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1.$$

24. Nađi sve uređene parove  $(m, n)$  cijelih brojeva takvih da je

$$m^2 + m = n^4 + n^3 + n^2 + n.$$

25. Nađi sve prirodne brojeve  $m, n, p$  takve da je

$$3(mn + np + pm) = 4mnp.$$

26. Nađi sve prirodne brojeve  $m, n, p$  takve da je

$$mn + np + pm - mnp = 2.$$

27. Nađi sve parove cijelih brojeva  $(x, y)$  takvih da je

$$(x + 1)^4 - (x - 1)^4 = y^3.$$

28. Nađi sve parove prirodnih brojeva  $(x, y)$  za koje je

$$(x + y)^2 + 3x + y + 1$$

kvadrat prirodnog broja.

29. Nađi sve uređene parove  $(x, y)$  cijelih brojeva takvih da je

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y.$$

30. (IMO 1994.) Nađi sve uređene parove  $(m, n)$  prirodnih brojeva takvih da je  $\frac{n^3+1}{mn-1}$  prirodan broj.

31. (IMO 1998.) Nađi sve uređene parove  $(m, n)$  prirodnih brojeva takvih da je  $m^2n + m + n$  djeljiv s  $mn^2 + n + 7$ .