Invarijante

Ljetne pripreme 19. lipnja 2019.

1. Ploča 8×8 na početku je obojena u dvije boje, crnu i bijelu, tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različitih boja, kao standardna šahovska ploča na slici. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od osam polja u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu ili obratno. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?

2. Danu uređenu trojku (x, y, z) u jednom potezu zamjenimo trojkom $(2y - x, 2z - y, 2x - z)$. Možemo li u konačno mnogo poteza iz trojke $(1, 7, 15)$ preći u $(11, 13, -3)$?

3. Danu uređenu četvorku (x, y, z, v) u jednom potezu zamjenimo četvorkom $(4y+2z-v, -4z+2v-x, -4v-2x+y, 4x-2y+z)$. Možemo li u konačno mnogo poteza iz četvorke $(1, 2, 3, 4)$ preći u $(-2, 0, 5, -2)$?

4. Na ploči pišu brojevi $1, 2, 3, \dots, 4n - 2$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Dopušten potez je uzeti neka dva broja a i b, izbrisati ih, te napisati $|a - b|$. Je li moguće na kraju dobiti 0?

5. Na otoku Velika Hrid živi 8 plavih, 10 crvenih i 12 zelenih kameleona. Kada se susretnu dva kameleona različitih boja, oni mijenjaju svoje boje u treću boju. Može li se dogoditi da, poslije izvjesnog broja susreta, svi kameleoni budu istobojni?

6. Na ploči pišu brojevi $1, 2, 3, \dots, n$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Potez se sastoji od toga da zamjenimo neka dva susjeda. Je li moguće u $2n + 1$ poteza doći do početne pozicije?

7. U polju veličine 10×10 u nekim kvadratima je korov. Korov će se proširiti na neki kvadrat ako je prethodno korov bio u bar dva (od četiri) susjedna kvadrata. Koji je minimalan broj početnih kvadrata s korovom tako da se korov proširi na cijelo polje?

8. Je li moguće ploču 10×10 popločiti s dominama dimenzija 1×4?

9. Ploča dimenzija $m \times n$ šahovski je ispunjena slovima A i B. Dozvoljena je sljedeća transformacija: odaberemo dva susjedna polja i u njima svako slovo A zamjenimo s B, svako B zamjenimo s C, a svako C zamjenimo s A. Odredite uvjet na m i n tako da je iz početne pozicije moguće doću u suprotnu (gdje su A i B zamjenjeni).

10. Promatramo koordinatnu mrežu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Na početku se novčići nalaze na kookrinatama $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)$. Ukoliko se na poziciji (m, n) nalazi novčić, a na pozicijama $(m + 1, n)$ i $(m, n + 1)$ ne nalaze novčići dozvoljen je potez maknuti novčić s pozicije (m, n) i staviti na svaku od pozicija $(m + 1, n)$ i $(m, n + 1)$ po jedan novčić. Je li moguće dobiti stanje suprotno početnom?