

Indukcija u kombinatorici

1. Formula vozi po kružnoj stazi. Uz stazu se nalaze benzinske stanice koje sve zajedno sadrže točno onoliko benzina koliko je potrebno da formula obiđe stazu. Pokažite da postoji mjesto na stazi s kojeg formula može krenuti da obiđe cijelu stazu.
2. Za matricu dimenzija $n \times n$ kažemo da je *srebrna* ako su joj svi elementi iz skupa $S = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$, te za svaki $i = 1, \dots, n$ svi elementi u i -tom retku i i -tom stupcu zajedno čine skup S . Dokaži da
 - (a) ne postoji srebrna matrica za $n = 2019$.
 - (b) postoji srebrna matrica za beskonačno mnogo n .
3. Na tavanu se nalazi 1000 staklenki koje sadrže razne količine pekmeza, ali nijedna ne sadrži više od $\frac{1}{100}$ ukupne količine pekmeza u svim staklenkama. Svakog dana potrebno je odabrati 100 staklenki, te se iz svake treba pojesti ista količina pekmeza. Dokaži da je moguće pojesti sav pekmez u konačno mnogo dana.
4. Nekoliko papirnatih kvadrata istih dimenzija obojenih u n boja leže na pravokutnom stolu tako da su im stranice paralelne sa stranicama stolu. Među bilo kojih n kvadrata koji u parovima imaju različitu boju postoje dva koja možemo pribadačom pribosti za stol. Dokaži da postoji boja takva da sve kvadrate u toj boji možemo pribosti za stol s najviše $2n - 2$ pribadača.
5. Na otoku živi n domorodaca. Svaka dva su ili prijatelji ili neprijatelji. Jednog dana poglavica naredi svim stanovnicima (uključujući i sebe) da si naprave i da nose kamene ogrlice, tako da svaka dva prijatelja imaju barem po jedan istovrsni kamen u svojim ogrlicama, a da se sva kamenja u ogrlicama dvaju neprijatelja razlikuju. Ogrlica može biti i bez kamenja. Dokažite da se poglavičina zapovijed može izvršiti koristeći $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ različitih vrsta kamenja, i da se općenito ovo ne može postići s manje kamenja.