Igre i brojevne baze

Zadaci

1. Biolog promatra kameleona. Kameleon lovi muhe i odmara se nakon svakog ulova. Biolog je primijetio:

   - Prvu muhu je kameleon ulovio nakon odmora od jedne minute.
   - Odmor prije ulova $2m$-te muhe je jednak odmoru prije ulova m-te muhe, a minutu je kraći od odmora prije ulova $(2m+1)$-ve muhe.
   - Kad prestane s odmorom, kameleon uhvati muhu u istom trenutku.

   (a) Koliko je muha kameleon uhvatio prije prvog odmora od 9 minuta?

   (b) Nakon koliko minuta će kameleon uhvatiti 98. muhu?

   (c) Koliko je muha kameleon uhvatio do 2019. minute od početka promatranja?

2. Albert i Barbara igraju sljedeću igru. Na stolu se nalazi 1999 štapića: svaki igrač u jednom potezu uklanja sa stola barem jedan štapić, a najviše pola preostalih štapića. Igrač koji ostavi samo jedan štapić na stolu gubi igru. Barbara igra prva. Odredi koji igrač ima pobjedničku strategiju.

3. Promotrimo 2009 karata, pri čemu je svaka s jedne strane zlatna, a s druge strane plava, poredane u niz na dugom stolu. Na početku su sve karte okrenute tako da pokazuju zlatnu stranu. Dva igrača, koji stoje kraj iste dulje stranice stola, naizmjenično rade poteze. Svaki potez se sastoji od odabira 50 uzastopnih karata, pri čemu prva od tih 50 karata slijeva pokazuje zlatnu stranu, te okretanja tih 50 karata (karte koje su pokazivale zlatnu strana pokazuju plavu i obratno). Pobjednik je onaj igrač koji može odigrati zadnji potez.

   a) Mora li igra nužno završiti?

   b) Postoji li pobjednička strategija za prvog igrača?

4. Neka je N prirodni broj. Mirko i Slavko naizmjence pišu brojeve iz skupa $\{1, 2, \ldots, N\}$ na ploču. Mirko započinje igru zapisujući broj 1 u prvom potezu. Nakon toga, ako je u nekom potezu napisan broj n, u sljedećem potezu je dozvoljeno napisati $n+1$ ili $2n$ (ukoliko taj broj nije veći od N). Igrač koji napiše broj N je pobjednik. Kažemo da je broj N Mirkov (odn. Slavkov) ako Mirko (odn. Slavko) ima pobjedničku strategiju.

   a) Odredi je li 2016 Mirkov broj.

   b) Nađi najmanji $N > 2016$ koji ne pripada istom igraču kao 2016.

5. U nekoj državi svaka dva od ukupno 1025 gradova povezana su dvosmjernom avionskom linijom jedne od 10 kompanija. Dokaži da postoji kompanija koja može ponuditi kružno putovanje s neparno mnogo gradova (kružno putovanje počinje i završava u istom gradu, a svaki drugi grad koji je uključen u putovanje se posjeti točno jednom).

6. Mirko i Slavko igraju sljedeću igru. Na stolu se nalazi N karata. Mirko počinje igru tako da uzme barem jednu, ali ne sve karte sa stola. Nakon toga igrači naizmjence uzimaju karte sa stola tako da u svakom koraku uzmu barem jednu kartu, ali ne smiju uzeti više nego dvostruko od broja karata koje je uzeo njihov protivnik u prethodnom koraku. Igrač koji uzme posljednju kartu sa stola pobjednik je.

   Odredite sve prirodne brojeve N za koje Mirko ima pobjedničku strategiju.

7. Neka je n prirodni broj. Binarni niz je *balansiran* ako se sastoji od točno n jedinica i n nula. Kažemo da su balansirani nizovi A i B *susjedni* ako premještanjem jedne znamenke niza A na drugo mjesto dobivamo niz B (npr. nizovi 01101001 i 00110101 su susjedni jer znamenku 0 s predzadnjeg mjesta u prvom nizu možemo premjestiti na prvo ili drugo mjesto i tako dobiti drugi niz). Dokaži da postoji skup S koji ima najviše $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ balansiranih nizova tako da je svaki balansirani niz u skupu S ili susjedan nekom nizu u skupu S.

8. Podskup (različitih) prirodnih brojeva zovemo DS-skup ako svaki element tog skupa dijeli zbroj svih elemenata tog skupa. Dokaži da je svaki konačni podskup prirodnih brojeva podskup nekog DS-skupa (odn. da se svaki konačni skup može proširiti do DS-skupa).

9. Pet identičnih praznih kanti kapaciteta 2 litre postavljeno je na vrhove pravilnog peterokuta. Pepeljuga i njena zla maćeha ponavljaju radnju u nizu krugova: na početku svakog kruga maćeha uzima jednu litru vode iz obližnje rijeke i raspodjeljuje vodu proizvoljno na pet kanti. Nakon toga Pepeljuga odabire dvije susjedne kante, isprazni ih u rijeku i vrati na početnu poziciju. Tada počinje novi krug. Maćeha želi postići da se jedna kanta prelije, a Pepeljuga to želi spriječiti.

   Može li zla maćeha ostvariti svoj cilj?

10. Podskup $M \subseteq \{1, 2, \ldots, 2011\}$ je *sjajan* ako zadovoljava sljedeće svojstvo: Među bilo koja tri elementa u M postoje dva, a i b, takvi da a dijeli b ili b dijeli a. Odredi maksimalan broj elemenata u sjajnom podskupu M.

Rezervni zadaci s MEMO

1. Učenici nekog srednjoškolskog razreda pisali su ispit. Na svakom pitanju mogao se dobiti ili 1 bod za točan odgovor, ili 0 bodova za netočan odgovor. Poznato je da je na svako pitanje točno odgovorio barem jedan učenik te da nisu svi učenici ostvarili jednak ukupni rezultat na ispitu.

   Dokažite da na testu postoji pitanje sa sljedećim svojstvom: Prosjek ukupnih rezultata učenika koji su na to pitanje odgovorili točno je veći od prosjeka ukupnih rezultata onih učenika koji su na njega odgovorili netočno.

2. Na sjevernoj strani ulice nalazi se $n \geqslant 2$ kuća. Od zapada prema istoku, kuće su označene brojevima od 1 do n. Svaka kuća ima istaknutu ploču s kućnim brojem. Jednog dana stanovnici te ulice odlučili su našaliti se s poštarom tako da su izmiješali ploče s kućnim brojevima na sljedeći način: svakim dvjema susjednim kućama su točno jednom međusobno zamijenjene ploče koje su u tom trenutku imale.

   Koliko različitih nizova ploča s brojevima se moglo postići na kraju toga dana?

3. Neka je n prirodni broj. Na ploču koja se sastoji od $4n \times 4n$ kvadrata postavljeno je točno $4n$ žetona tako da se u svakom retku i svakom stupcu nalazi točno jedan žeton. U jednom koraku, jedan žeton pomičemo horizontalno ili vertikalno na susjedni kvadrat. Više žetona se u nekom trenutku može nalaziti na istom kvadratu. Žetone trebamo pomaknuti tako da zauzimaju sve kvadrate jedne od dviju dijagonala.

   Odredi najmanji broj $k(n)$ takav da to možemo postići u najviše $k(n)$ koraka za bilo koji početni raspored.