Algoritmi i procesi

1. U ravnini je $2n + 1$ gangstera koji se svi nalaze na različitim udaljenostima. Svatko gađa loptom najbližeg. Dokaži da
   (a) barem jednog nitko neće pogoditi.
   (b) nitko nije pogođen s više od 5 lopti.
   (c) putevi lopti se ne križaju.
   (d) skup dužina kojeg formiraju putevi lopti ne sadrži zatvoren poligon.
2. Dano je konačno mnogo točaka u ravnini tako da površina svakog trokuta kojem su vrhovi neke tri od danih točaka nije veća od 1. Dokaži da se sve točke može pokriti trokutom površine 4.
3. Dano je 8 kockica čije strane su obojane tako da je točno 24 strana crveno, a 24 plavo. Dokaži da se od tih kockica može složiti $2 \times 2 \times 2$ kocka kojoj se na oplošju nalazi jednak broj plavih i crvenih kvadrata 1×1.
4. Dano je $2n + 3$ točaka u ravnini tako da se nikoje tri ne nalaze na istom pravcu i nikoje četiri na istoj kružnici. Dokaži da postoji kružnica koja prolazi kroz neke tri od zadanih točaka i unutar koje se nalazi točno n zadanih točaka.
5. Neka je n prirodni broj. U n različitih točaka duž kružne staze nalazi se n automobila. Svakom automobilu treba jedan sat da obiđe čitavu stazu. U istom trenutku svi automobili odabiru jedan od dva moguća smjera i kreću u odabranom smjeru. Kad se dva automobila susretnu oba promjene smjer i nastavljaju vožnju bez promjene brzine. Dokaži da će u nekom trenutku svi automobili istovremeno biti u svom početnom položaju.
6. Neka su n i d prirodni brojevi i neka je G graf s n vrhova. Stupanj svakog vrha grafa G iznosi najviše d. Dokaži da je sve vrhove grafa G moguće obojati u $d + 1$ boja tako da susjedni vrhovi nemaju istu boju.
7. Neka je n prirodni broj. U tablici dimenzija $2 \times n$ nalaze se pozitivni realni brojevi tako da je u svakom od n stupaca zbroj dva broja jednak 1. Dokaži da iz svakog stupca možemo odabrati po jedan broj tako da je zbroj odabranih brojeva u svakom retku najviše $\dfrac{n+1}{4}$.
8. Neka je n prirodni broj i neka je G graf s n vrhova. Dokaži da sve vrhove grafa G možemo obojati u dvije boje tako da svaki vrh ima barem pola susjednih vrhova različite boje od boje tog vrha.
9. U jedno zgradi živi 119 stanara u 120 stanova. Kažemo da je stan *prenapučen* ako u njemu živi barem 15 ljudi. Svakog dana stanari prenapučenog stana imaju svađu i svatko od njih odlazi u drugi stan u zgradi. Mora li taj proces stati jednog dana?

10. Pet identičnih praznih kanti kapaciteta 2 litre postavljeno je na vrhove pravilnog peterokuta. Pepeljuga i njena zla maćeha ponavljaju radnju u nizu krugova: na početku svakog kruga maćeha uzima jednu litru vode iz obližnje rijeke i raspodjeljuje vodu proizvoljno na pet kanti. Nakon toga Pepeljuga odabire dvije susjedne kante, isprazni ih u rijeku i vrati na početnu poziciju. Tada počinje novi krug. Maćeha želi postići da se jedna kanta prelije, a Pepeljuga to želi spriječiti. Može li zla maćeha ostvariti svoj cilj?

11. Promotrimo 2019 karata pri čemu je svaka s jedne strane zlatna, a s druge strane plava, poredane u niz na dugom stolu. Na početku su sve karte okrenute tako da pokazuju zlatnu stranu. Dva igrača, koji stoje kraj iste dulje stranice stola, naizmjenično rade poteze. Svaki potez se sastoji od odabiranja 50 uzastopnih karata, pri čemu prva od tih 50 karata slijeva pokazuje zlatnu stranu, te okretanja tih 50 karata (karte koje su pokazivale zlatnu strana pokazuju plavu i obratno). Pobjednik je onaj igrač koji može odigrati zadnji potez.

    a) Mora li igra nužno završiti?
    b) Postoji li pobjednička strategija za prvog igrača?

12. Biolog promatra kameleona. Kameleon lovi muhe i odmara se nakon svakog ulova. Biolog je primijetio:

    - Prvu muhu je kameleon ulovio nakon odmora od jedne minute.
    - Odmor prije ulova $2m$-te muhe je jednak odmoru prije ulova m-te muhe, a minutu je kraći od odmora prije ulova $(2m+1)$-ve muhe.
    - Kad prestane s odmorom, kameleon uhvati muhu u istom trenutku.

    (a) Koliko je muha kameleon uhvatio prije prvog odmora od 9 minuta?
    (b) Nakon koliko minuta će kameleon uhvatiti 98. muhu?
    (c) Koliko je muha kameleon uhvatio do 2019. minute od početka promatranja?

13. Formula vozi po kružnoj stazi. Uz stazu se nalaze benzinske stanice koje sve zajedno sadrže točno onoliko benzina koliko je potrebno da formula obiđe stazu. Pokažite da postoji mjesto na stazi s kojeg formula može krenuti da obiđe cijelu stazu.

14. Za matricu dimenzija $n \times n$ kažemo da je *srebrna* ako su joj svi elementi iz skupa $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$, te za svaki $i = 1, \dots, n$ svi elementi u i-tom retku i i-tom stupcu zajedno čine skup S. Dokaži da

    (a) ne postoji srebrna matrica za $n = 2019$.
    (b) postoji srebrna matrica za beskonačno mnogo n.

15. Na tavanu se nalazi 1000 staklenki koje sadrže razne količine pekmeza, ali nijedna ne sadrži više od $\frac{1}{100}$ ukupne količine pekmeza u svim staklenkama. Svakog dana potrebno je odabrati 100 staklenki, te se iz svake treba pojesti ista količina pekmeza. Dokaži da je moguće pojesti sav pekmez u konačno mnogo dana.