Bojanje i invarijante
Ilko Brnetić

Radionice mladih matematičara

Zagreb, 20.6.2019.

Bojanje - zadatci

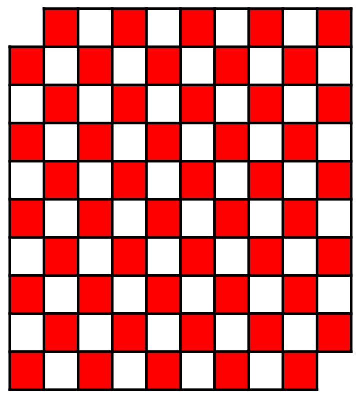
Primjeri:

1. Može li se ploča 10x10 od koje su izrezana dva nasuprotna kutna polja popločati pravokutnim pločicama tipa 1x2 (dominima)?

Možete pokušavati napraviti popločavanje i naslutiti da to nije moguće.

Kako dokazati da popločavanje nije moguće?

Obojimo ploču na sljedeći način:

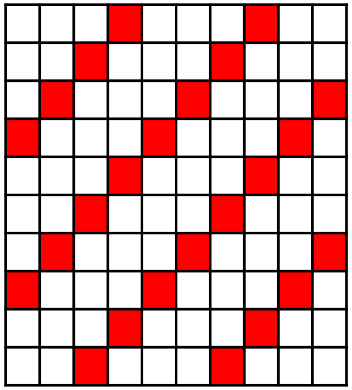


Prekrivamo li pločicama 1x2, svaka pločica će pokriti jedno crveno i jedno bijelo polje. Kako je broj crvenih polja 50, a broj bijelih polja 48, a traženim popločavanjem bismo trebali pokriti 49 crvenih i bijelih polja, popločavanje nije moguće.

Primjeri zadataka:

2. Može li se ploča 10x10 popločati pločicama tipa 1x4?

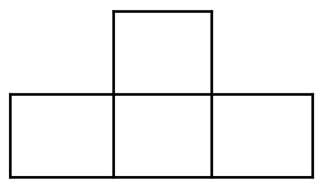
Ploču ćemo obojati na sljedeći način:



Svaka će pločica 1x4 pokriti 1 crveno i 3 bijela polja (time bismo ukupno pokrili 25 crvenih i 75 bijelih polja). Kako je broj crvenih polja 24, a broj bijelih polja 76, traženo popločavanje nije moguće.

Primjeri zadataka:

3. Može li se ploča 10x10 pokriti pločicama (tetrominima) oblika



?

U trećem zadatku, ploču 10x10 ćemo opet obojati „šahovski” (crveno-bijelo). Tada svaki tetromino pokriva 3 crvena i 1 bijelo ili 3 bijela i 1 crveno polje.

Da bismo popločali cijelu ploču (koja se sastoji od 50 crvenih i 50 bijelih polja) trebali bismo koristiti jednaki broj tetromina koji prekrivaju 3 crvena kao i onih koji prekrivaju 1 crveno polje što znači da bi ukupni broj polja trebao biti djeljiv s 8. Kako to nije slučaj (100 nije djeljiv s 8), to znači da traženo popločavanje nije moguće.

Primjeri zadataka:

4. Pokaži da se šahovska ploča 8x8 prekriti 21 pravokutnom pločicom tipa 1x3 i jednom tipa 1x1. Pri takvom popločavanju, koja polja mogu biti pokrivena pločicom 1x1?

Želimo postaviti pločice 1x3 na šahovsku ploču i vidjeti koja polja mogu ostati prazna.

„Obojimo” šahovsku ploču na dva načina (za ta „bojanja” ćemo, za promjenu, koristiti brojeve)

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2
1	3	2	1	3	2	1	3
2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2
1	3	2	1	3	2	1	3
2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2

Vidimo da prilikom oba „bojanja” se broj 2 pojavljuje 22 puta, a brojevi 1 i 3 po 21 put. To znači da, ako je popločavanje moguće, prazno se polje mora nalaziti na nekom od polja u koji je upisan broj 2 prilikom oba „bojanja”; takvih je polja točno 4 (označeni su na slici s x).

		x			x		
		x			x		

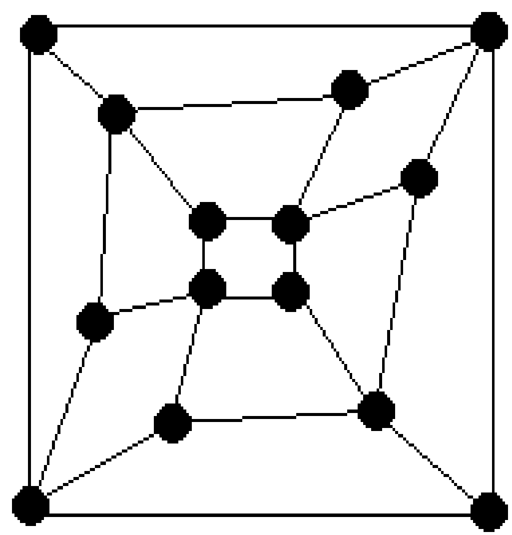
Primijetimo da zadatak time nije u potpunosti riješen. Time smo samo dokazali, AKO JE POPLOČAVANJE MOGUĆE, da pločica 1x1 ne može biti niti na jednom drugom polju, osim možda na nekom od označena 4.

DA TAKVO POPLOČAVANJE (za svako označeno polje) POSTOJI, TREBA DOKAZATI KONSTRUKCIJOM POPLOČAVANJA (zbog simetrije označenih polja u odnosu na pravac koji dijeli ploču na dvije sukladne ploče 4x8, dovoljno je konstruirati popločavanje za jedno od ta četiri polja – ostale tri konstrukcije su analogne).

Konstrukciju popločavanja prepuštamo čitatelju.

Zadatak za samostalni rad:

5. Zadana je mreža gradova i puteva među njima (vidi sliku). Postoji li put koji prolazi kroz sve gradove točno jednom ?



Invarijante - zadatci

Invarijante - zadatci

1. Na stolu se nalazi 16 čaša. Od njih je 15 postavljeno pravilno, a 1 naopačke. U jednom potezu je dozvoljeno istovremeno okrenuti bilo koje dvije čaše. Može li se, ponavljanjem takvog postupka, postići da sve čaše budu postavljene pravilno?

1. zadatak - rješenje

Uočimo veličinu koja ostaje nepromijenjena (invarijanta) prilikom svakog takvog poteza – **parnost pravilno** (ili naopačke, sasvim svejedno) **postavljenih čaša**.

Naime, ukoliko okrenemo dvije pravilno postavljene čaše, ukupni broj pravilno postavljenih čaša smanjit će se za 2, ukoliko okrenemo dvije naopačke postavljene čaše, ukupni broj pravilno postavljenih čaša smanjit će se za 2, a ukoliko okrenemo jednu pravilno i jednu naopačke postavljenu čašu, ukupni broj pravilno postavljenih čaša ostat će isti.

Kako smo na početku imali 15 pravilno postavljenih čaša, a želimo svih 16 čaša postaviti pravilno, to nije moguće, jer je 15 neparan, a 16 paran broj (a parnost broja pravilno postavljenih čaša se ne mijenja prilikom svakog poteza kojim okrećemo čaše).

2. Na školskoj ploči je napisano 5 brojeva. U svakom koraku radimo sljedeću transformaciju: odabiremo bilo koja tri broja, nazovimo ih x, y i z i mijenjamo ih u $2x-y$, $2y-z$ i $2z-x$. Ako su na početku bili napisani brojevi 7, 10, 12, 15, 17, možemo li, uzastopnim ponavljanjem tog postupka, doći do petorke brojeva:

a) 6, 8, 10, 18, 19 ?
b) 9, 11, 13, 14, 16 ?

2. zadatak - rješenje

Možemo primijetiti kako je broj parnih (ili neparnih) brojeva u svakoj petorci uvijek isti, jer trojku brojeva zamjenjujemo trojkom brojeva među kojima je broj parnih brojeva isti (**broj parnih brojeva je invarijanta**).

Uočimo da na početku imamo dva parna, a na kraju želimo imati četiri parna broja. Zato ne možemo doći do petorke brojeva navedene u a).

2. zadatak - rješenje

U podzadatku b) želimo ispitati možemo li doći do petorke 9, 11, 13, 14, 16. Ona sadrži 2 parna broja.

Iz toga naravno ne možemo zaključiti da možemo doći do te petorke.

(Da bismo to mogli zaključiti, morali bismo naći niz poteza kojima ćemo doći od polazne do ciljane završne petorke.)

Odgovor je inače i u ovom slučaju negativan.

2. zadatak - rješenje

Invarijanta transformacije je i zbroj svih brojeva. Naime, $(2x-y)+(2y-z)+(2z-x)=x+y+z$, pa i dodavanjem dva broja koja ne mijenjamo zbroj ostaje isti.

Kako je $7+10+12+15+17=61$,

a $9+11+13+14+16=63$,

petorku pod b) nije moguće dobiti.

Primjedba. Zadatak je sastavljen tako da u petorka u podzadatku a) ima isti zbroj kao i polazna petorka pa tako invarijanta koju smo koristili u b) dijelu zadatka ne bi bila od pomoći u podzadatku a).

3. Ploča 8x8 obojana je crno-bijelo kao standardna šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od 8 polja u tom retku promijeniti boju iz crne u bijelu i obratno. Može li se, konačnim nizom takvih poteza, postići da točno jedno polje na ploči bude crno?

(Županijsko natjecanje RH, 1. razred, 2014.)

To nije moguće postići.

U svakom potezu ćemo promijeniti boju na točno 8 polja. Ako je k od tih polja crno, onda je $8 - k$ od tih polja bijelo. Označimo sa C ukupan broj crnih polja prije nekog poteza.

Nakon tog poteza će ukupan broj crnih polja biti $C - k + (8 - k) = C + 8 - 2k$.

Zaključujemo da će parnost ukupnog broja crnih polja uvijek biti ista (invarijanta transfomacije).

Budući da je na početku ukupan broj crnih polja jednak 32, što je paran broj, nemoguće je da nakon bilo kojeg broja poteza broj crnih polja bude 1.

4. Na otoku Velika Hrid živi 15 plavih, 17 crvenih i 20 zelenih kameleona, a na otoku Mala Hrid 8 plavih, 10 crvenih i 12 zelenih kameleona.

Kada se susretnu dva kameleona različitih boja, oni mijenjaju svoje boje u treću boju. Može li se dogoditi da, poslije izvjesnog broja susreta, svi kameleoni na otoku Velika Hrid budu istobojni? A na otoku Mala Hrid?

4. zadatak – rješenje zadatka **b)**

Brojevi plavih, crvenih i zelenih kameleona 8,10,12 čine potpun sustav ostataka pri dijeljenju s 3.

Nakon svakog susreta, broj plavih, crvenih i zelenih kameleona će opet činiti potpun sustav ostataka pri dijeljenju s 3 (broj kameleona jedne vrste povećat će se za 2, a broj preostalih dviju smanjit će se za 1), pa nije moguće da svi kameleoni budu istobojni.

4. zadatak - rješenje zadatka **a)**

Najprije se susretnu 1 plavi i 1 zeleni kameleon i nakon toga imamo 14 plavih te po 19 crvenih i zelenih kameleona. Nakon toga se sastaju samo crveni i zeleni sve dok svi kameleoni ne postanu plavi.

Poopćenje zadatka

Neka je p plavih, c crvenih i z zelenih kameleona.

U ovisnosti o p, c i z treba odrediti kada je odgovor na pitanje iz zadatka pozitivan, a kada negativan.

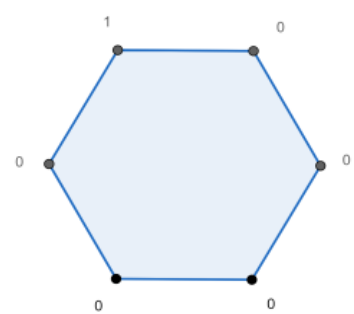
Odgovor

Odgovor je negativan u slučaju ako p, c i z daju čine potpun sustav ostataka pri dijeljenju s 3 i to dokazujemo na istovjetan način kao u rješenju zadatka s p=8, c=10 i z=12.

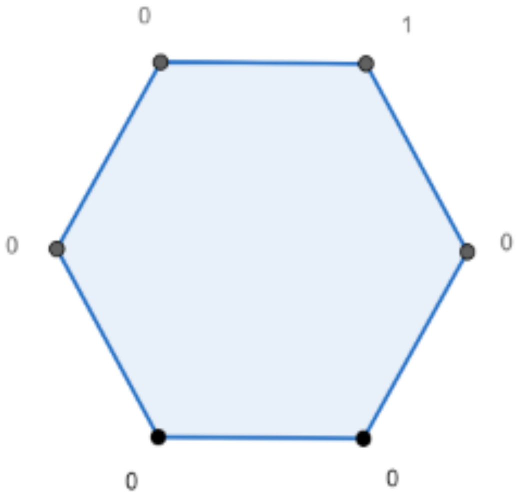
S druge strane, odgovor na pitanje u zadatku je pozitivan ako brojevi p, c i z ne čine potpun sustav ostataka pri dijeljenju s 3, tj. ako barem dva od ta tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju s 3. To dokazujemo tako da konstruiramo takav raspored susreta da svi kameleoni nakon tih susreta budu istobojni koristeći ideju navedenu u rješenju zadatka s p=15, c=17 i z=20.

5. Čarobnjak iz priče "Mačak u čizmama" ima vještinu pretvaranja miševa u lavove i obratno. Za večeru je pozvao 1 lava i 5 miševa i posjeo ih oko okruglog stola. Ali čarobnjak svoju vještinu može jednokratno primijeniti samo na tri susjedna gosta. I onda je primijeniti opet, po istom pravilu, itd. Može li čarobnjak, uzastopnim ponavljanjem te operacije, postići da oko stola bude opet 1 lav i 5 miševa, ali tako da lav sjedi na mjestu neposredno pored onog na kojem je sjedio na početku?

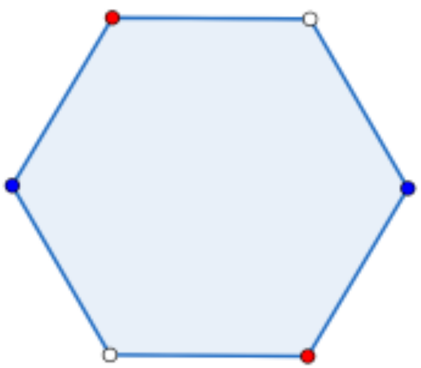
Pitanje možemo reformulirati ovako: u svakom od vrhova šesterokuta upisan je broj 0 ili 1. Potom, u svakom koraku, mijenjamo postojeće stanje (iz 0 u 1 ili iz 1 u 0) u tri susjedna vrha. Možemo li, nizom takvih postupaka, postići da od šesterokuta



dođemo do šesterokuta



Obojimo vrhove šesterokuta u tri boje na sljedeći način:



Označimo s A zbroj brojeva u crvenim, s B zbroj brojeva u bijelim vrhovima, a s C zbroj brojeva u plavim vrhovima. Na početku je $A=1$, $B=0$ i $C=0$. Želimo da na kraju bude $A=0$, $B=0$ i $C=1$. No, pri svakoj transformaciji, i A i B i C mijenjaju svoju parnost, što znači da parnost brojeva B i C ostaje ista te tako nije moguće ostvariti (čarobnjakov) cilj.

6. U svakom od vrhova dvanaesterokuta nalazi se po jedan žeton. U svakom koraku uočimo bilo koja dva žetona i premještamo ih na susjedni vrh, i to jedan od njih na susjedni u smjeru kretanja kazaljke na satu, a drugi na susjedni u drugom smjeru. Možemo li, uzastopnim ponavljanjem takvih operacija, nakon određenog broja koraka, postići da su žetoni grupirani:

a) u četiri vrha, u svakom po tri žetona,

b) u tri vrha, u svakom po četiri žetona.

6. zadatak - rješenje

a) možemo – treba napraviti konstrukciju što nije teško.

b) pridružimo svakom vrhu dvanaesterokuta prirodan broj i to redom od 1 do 12, npr. u smjeru kretanja kazaljke na satu. Pridružimo pritom svakom žetonu broj vrha na kojem se nalazi. Označimo sa S zbroj svih brojeva pridruženih žetonima. Na početku je $S=1+2+3+...+12=78$. Prilikom svake transformacije S ostaje isti ili se mijenja za 12 tako da ni u kojem koraku nije djeljiv s 4. A za ciljani raspored žetona vrijedi da S mora biti djeljiv s 4. Zato ne možemo tako grupirati žetone.

7. U pravokutnom koordinatnom sustavu zadana je koordinatna mreža kao skup svih točaka (i, j), gdje su i i j prirodni brojevi i po tim točkama skaču buhe i to po sljedećem pravilu:

- iz točke(a, b) svaka buha može skočiti jednu od sljedećih točaka:
- $(a + b, b), (a, b + a), (a - b, b)$, ako je $a > b$ ili $(a, b - a)$, ako je $b > a$.

Buha A se u početku nalazi u točki $(6,3)$, buha B u točki $(20,15)$, buha C u točki $(45,18)$, a buha D u točki $(9,15)$. Za svaki par buha (A i B, A i C, A i D, B i C, B i D, C i D) ustanovite mogu li tijekom svojih skokova prijeći preko iste točke.

7. zadatak - rješenje

Ako buha skače s pozicije (a_1, b_1) na poziciju (a_2, b_2), onda mora biti $D(a_1, b_1) = D(a_2, b_2)$. Ukoliko buha iz točke (a_1, b_1) u točku (a_n, b_n) dolazi nakon više skokova, jednako tako mora vrijediti da je $D(a_1, b_1) = D(a_n, b_n)$.

Uočimo da je $D(6,3) = 3, D(20,15) = 5, D(45,18) = 9, D(9,15) = 3$.

Zato buhe B i C ne mogu tijekom svojih skokova prijeći preko iste točke, a ne mogu prijeći niti preko iste točke kao buhe A i D.

Pokažimo da buhe A i D mogu prijeći preko iste točke. Za to je dovoljno naći niz skokova koji vodi od $(6,3)$ do $(9,15)$:

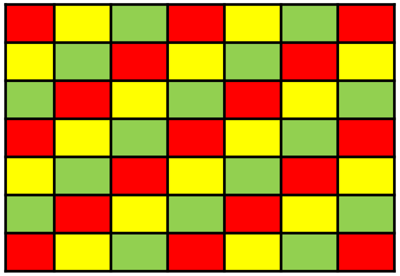
$$(6,3) \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (3,6) \longrightarrow (9,6) \longrightarrow (9,15).$$

- Primjedba 1. Može se pokazati kako vrijedi da buha može doći iz točke (a, b) u točku (c, d) samo ako je $D(a, b) = D(c, d)$, tj. može se pokazati da je, u slučaju istog najvećeg zajedničkog djeljitelja, moguće uvijek konstruirati takav niz skokova kao što je, u konkretnom slučaju, konstruiran niz skokova iz $(6,3)$ u $(9,15)$ (radimo Euklidov algoritam svođenja na (d, d), gdje je d najveći zajednički djeljiteljem i to „u dva smjera”).
- Primjedba 2. Da buha B neće prijeći preko iste točke kao i buhe A, C i D može se zaključiti i samo iz činjenice što obje koordinate svih točaka kojima prolazi buha B moraju biti djeljive s 5, a barem jedna koordinata svih točaka kojima prolaze buhe A, C i D nije djeljiva s 5.

8. Na po volji velikoj kvadratnoj ploči postavljeno je 9 žetona u polja kvadrata 3x3, po jedan u svako polje. U svakom koraku možemo s jednim žetonom skočiti u horizontalnom ili vertikalnom smjeru preko jednog zauzetog polja na slobodno polje i pritom žeton koji je preskočen uklanjamo. Može li ova "igra" završiti sa samo jednim žetonom na ploči?

8. zadatak – rješenje

Obojimo polja te ploče u tri boje – dijagonale bojamo u istu boju. (vidi sliku; treba imati na umu da je ploča po volji velika)



8. zadatak - rješenje

Označimo s C, Z i Ž broj žetona koji se nalaze na poljima crvene, zelene i žute boje, redom. Na početku je C=3, Z=3, Ž=3. (na ovoj slici je označen kvadrat 3x3 u kojem se na početku nalaze žetoni).

Prilikom svakog skoka žetonom, jedna od veličina C, Z i Ž se povećava za 1, a dvije se smanjuju za 1 i nemoguće je da na kraju jedna od njih bude jednaka 1, a dvije jednake 0 (npr. to možemo argumentirati time da su svakom koraku ta tri broja iste parnosti).

Isti zadatak možemo poopćiti tako da umjesto kvadrata 3x3 imamo po jedan žeton u svakom polju kvadrata n x n.

Upravo takav zadatak je bio zadan na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi 1993. godine.

Odgovor: „igru” je moguće završiti s jednim žetonom na ploči ako i samo ako n nije djeljiv s 3. Za n djeljiv s 3 koristimo spomenutu ideju dokaza za kvadrat 3x3, a za ostale n potrebno je konstruirati redoslijed skokova koji završava s jednim žetonom na ploči (uz korištenje matematičke indukcije).

Skakačeve ture

9. a) Dokaži da skakač (skačući po pravilima kao šahovska figura) ne može obići svako polje ploče m x n (m i n neparni) i vratiti se na početno polje.

b) Može li skakač obići svako polje ploče 4 x 8 točno jednom i vratiti se na početno polje?

9. zadatak - rješenje

a) obojimo polje na šahovski način i vidimo da svakim skokom skakač mijenja boju polja, a morao bi skočiti neparno puta s time da zadnjim skokom dolazi na polje iste boje kao što je početno, pa to nije moguće.

9. zadatak - rješenje

A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	B	B	B	B	B
A	A	A	A	A	A	A	A

U svakom skoku skakač mijenja boju polja, a osim toga skakač iz sektora A može ići samo u sektor B. Da bi prošao sva polja točno jednom (i vratio se na početno polje), skakač se mora iz sektora B vratiti odmah u sektor A što znači da, skače li na taj način, niti na jedno polje jedne boje (a kamoli na sva) u sektoru B ne može skočiti (niti na sva polja u sektoru A, ali to više nije bitno).

Skakačeve ture (Knight's tour) vrlo su poznat matematički problem (neke osnovne informacije možete naći i na wikipediji). Razlikujemo zatvorene ture (one u kojima se skakač mora vratiti na početno polje) i otvorene (one u kojima ne mora). Problemi u ovom zadatku su problemi nepostojanja zatvorene skakačeve ture za neke konkretne dimenzije ploče.

Allen J. Schwenk (1991) je u svom članku "Which Rectangular Chessboards Have a Knight’s Tour?". Mathematics Magazine: 325–332 (možete ga lako naći na internetu) dokazao da je, za ploču *m* x *n*,

$m \leq n$, zatvorena skakačeva tura moguća ako i samo ako nije ispunjen niti jedan od sljedećih uvjeta:

(i) *m* i *n* su oba neparni,

(ii) *m*=1, *m*=2 ili *m*=4,

(iii) *m* = 3 i *n* = 4, *n*=6 ili *n*=8.

Zadatci za samostalni rad:

10. Na ploči je napisano prvih n prirodnih brojeva. Potom, u koracima, smanjujemo po jedan broj na ploči tako da obrišemo dva postojeća broja te ga zamijenimo pozitivnom razlikom ta dva broja sve dok na kraju na ploči ne ostane samo jedan broj.

U ovisnosti o prirodnom broju n, odredi hoće li taj zadnji broj biti paran ili neparan.

11. Zadana je ploča 5x5 i na svakoj je postavljen jedan žeton. Ako u svakom koraku pomaknemo žetone sa dva polja (ne nužno različita), po jedan žeton u susjedno polje (dva su polja susjedna ako imaju zajedničku stranicu), možemo li sve žetone premjestiti u polje označeno sa:

a) X, b) O ?

	X			
			O	

12. Na ploči se nalazi prvih n prirodnih brojeva ($n \geq 3$). Ante ponavlja sljedeći postupak: najprije po volji bira dva broja na ploči, a zatim ih povećava za isti, proizvoljan, prirodan broj. Odredi sve prirodne brojeve n za koje Ante, ponavljanjem tog postupka, može postići da svi brojevi na ploči budu jednaki.

(Državno natjecanje RH, 1. razred, 2015.)

Pomoć

Zadatak 12. je malo zathjevniji; oni koji žele malu pomoć, tj. informaciju za koje *n* može ostvariti cilj, neka to pogledaju na sljedećem slide-u.

Odgovor

Ante može ostvariti cilj ako i samo ako *n* ne daje ostatak 2 pri dijeljenju s 4.

Za takve *n* dokazati da to nije moguće nalaženjem invarijante, a za one brojeve *n* za koje je moguće treba naći konstrukciju poteza kojom Ante može ostvariti cilj.

Literatura

(1) Zadatci s natjecanja u RH i SFRJ

(2) Željko Hanjš: Međunarodne matematičke olimpijade, Element, Zagreb, 2017

(3) Arthur Engel: Problem Solving Strategies, Springer, 1998

(4) Allen J. Schwenk "Which Rectangular Chessboards Have a Knight’s Tour?". Mathematics Magazine: (1991), 325–332