Što je to algebra?

Matija Bašić

18. lipnja 2019.

Zadaci

1. Odredi i dokaži pravilo na temelju sljedećih jednakosti

$$9^2 - 5^2 = 4 \cdot 14,$$
$$10^2 - 3^2 = 7 \cdot 13,$$
$$7^2 - 4^2 = 3 \cdot 11.$$

2. Odredi formule za $(a+b)^3$ i $a^3 - b^3$.

3. Dokaži da je razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja djeljiva s 8.

4. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a^3 + b^3 = 2ab(a+b)$. Odredi

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}.$$

5. Rastavite $a^4 + 4b^4$ kao produkt dva izraza.

6. Odredi sve realne brojeve x takve da je

   (a) $x^2 - 4x - 5 = 0$,

   (b) $4x^2 - 11x - 3 = 0$.

7. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje vrijedi

$$(m^2 + n)(m + n^2) = (m + n)^3.$$

8. Riješite sustav

$$x(y+z) = 27,$$
$$y(z+x) = 32,$$
$$z(x+y) = 35.$$

9. Riješite sustav

$$x^3 + y^3 = 72,$$
$$x^2y + xy^2 = 48.$$

10. Učenici su odlučili igrati igru s ukupno 960 žetona. Najprije su podijelili sve žetone tako da svatko od njih ima isti broj žetona. Čim su to napravili, stigao je njihov nastavnik te je poželio priključiti se igri. Svaki učenik mu je dao po 4 žetona, pa su svi imali jednak broj žetona i bili su spremni za početak igre. Koliko učenika sudjeluje u igri?

11. Oko okruglog stola nalazi se deset stolica označenih redom brojevima od 1 do 10 (pri čemu su stolice 1 i 10 susjedne) i na svakoj sjedi po jedan vitez. Svaki vitez na početku ima paran broj zlatnika. Istovremeno svaki vitez pokloni polovinu svojih zlatnika svom lijevom susjedu, a pola svojih zlatnika svom desnom susjedu. Nakon toga vitez na stolici 1 ima 22 zlatnika, a svaki idući za dva više, sve do viteza na stolici 10 koji ima 40 zlatnika.

    Koliko je zlatnika na početku imao vitez koji na kraju ima 36 zlatnika?

12. Riješite jednadžbu

$$(x-1)+(x-4)+\ldots+(x-298)=50.$$

13. Izračunaj zbroj

$$1+3+5+\ldots+531.$$

14. Izračunaj zbroj

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 101}.$$

15. Izračunaj zbroj

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

16. Što je veće $\sqrt{19}+\sqrt{99}$ ili $\sqrt{20}+\sqrt{98}$?

17. Dokaži da za sve realne brojeve a, b i c takve da je $a \leqslant b \leqslant c$ vrijedi

$$c^2-b^2+a^2 \geqslant (c-b+a)^2.$$

18. Dokaži da za bilo koja dva realna broja x i y vrijedi

$$3x(x+2y) \leqslant (2x+y)^2.$$

19. Dokaži da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leqslant a^2+b^2+c^2+2(a-b+1).$$

20. Riješite sustav

$$\frac{2x^2}{1+x^2}=y,$$
$$\frac{2y^2}{1+y^2}=z,$$
$$\frac{2z^2}{1+z^2}=x.$$

Dodatni zadaci iz algebre (8. razred)

Matija Bašić

18. lipnja 2019.

Zadaci

1. Anja i Vanja su sudjelovale u utrci. Broj trkača koji su završili utrku prije Anje jednak je broju trkača koji su završili nakon nje. Broj trkača koji su završili utrku prije Vanje je tri puta veći od broja trkača koji su završili nakon nje. Točno 10 trkača završilo je utrku između Anje i Vanje. Ako su svi trkači završili utrku, te nikoja dva trkača nisu završila u isto vrijeme, odredi ukupan broj trkača.

2. Neka su x i y različiti realni brojevi takvi da je $2xy + 1 \neq 0$ i neka su

$$A = \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \quad \text{i} \quad B = \frac{x(x^2 - 1) - y(y^2 - 1)}{x - y}.$$

   Odredi koji je broj veći, A ili B.

3. Ako za brojeve a, b i c vrijedi $a+b+c = 3$, $a^2+b^2+c^2 = 5$ i $a^3+b^3+c^3 = 7$, odredi $a^4 + b^4 + c^4$.

4. Izračunaj sumu

$$\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{2019}{1009 \cdot 1010 \cdot 1011}.$$

5. Odredi sve realne brojeve a i b za koje vrijedi

$$2(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (a + 1)(b + 1)(ab + 1).$$

6. Odredi sve trojke pozitivnih realnih brojeva (x, y, z) za koje vrijedi

$$x + y + z \leqslant 12, \qquad \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} = 3.$$