MEMO pripreme 2019 – Algebra

Petar Bakić

18. 6. 2016.

Polinomi

1. Postoji li polinom $P(x)$ s realnim koeficijentima takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$P\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}?$$

2. Neka je P polinom s pozitivnim koeficijentima. Ako nejednakost
$$P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{P(x)}$$
vrijedi za $x = 1$, dokaži da vrijedi za svaki $x > 0$.

3. Nađi sve parove **normiranih** polinoma P, Q s kompleksnim koeficijentima za koje
$$P(x) | Q(x)^2 + 1 \quad \text{i} \quad Q(x) | P(x)^2 + 1.$$

4. Nađi sve parove polinoma P, Q s realnim koeficijentima takve da
$$P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = 1.$$

Najveće cijelo

Primjer (simulacija). Neka je n prirodan broj i neka su $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ realni brojevi za koje vrijedi
$$a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = 0.$$
Dokaži da tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$a_1\lfloor x \rfloor + a_2\lfloor 2x \rfloor + \ldots + a_n\lfloor nx \rfloor \geq 0.$$

1. Niz (x_n) zadan je s $x_0 = 1$ i $x_{n+1} = 3x_n + \lfloor x_n\sqrt{5} \rfloor$.
Imamo $x_1 = 5, x_2 = 26, x_3 = 136, x_4 = 712, \ldots$ Odredi zatvorenu formulu za opći član niza.

Nizovi

1. Niz (x_n) zadan je rekurzivno s $x_0 = a$, $x_1 = b$ i

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_n}\right).$$

Ako je poznato da je (x_n) periodičan, dokaži da vrijedi $ab = 1$.

2. Neka su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i x, $0 < x < 1$, realni brojevi takvi da vrijedi

$$\frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{1-x^2} + \ldots + \frac{a_n}{1-x^{n+1}} = 0.$$

Dokaži da postoji realan broj $y \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je

$$a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n = 0.$$

Primjer (IMO 2018). Pronađi sve prirodne brojeve $n \geq 3$ za koje postoje realni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ takvi da je $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ i

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

za sve $i = 1, \ldots, n$.

3. Kažemo da je niz $a_0, a_1, \ldots a_n$ realnih brojeva p-balansiran (za neki $p \in \mathbb{N}$) ako vrijedi

$$a_0 + a_p + a_{2p} + \cdots = a_1 + a_{p+1} + \cdots = \ldots = a_{p-1} + a_{2p-1} + \cdots$$

Pretpostavimo da je niz $a_0, a_1, \ldots a_{49}$ p-balansiran za $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$. Dokažite da je tada $a_0 = a_1 = \ldots = a_{49} = 0$.

MEMO pripreme 2019 – Algebra (tulum)

Petar Bakić

18. 6. 2016.

1. Niz (u_n) je zadan s $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{5}{2}$,
$$u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1.$$
Dokaži da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$\lfloor u_n \rfloor = 2^{(2^n - (-1)^n)/3}.$$

2. Nađi sve polinome P takve da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$P(x)P(2x^2 - 1) = P(x^2)P(2x - 1).$$

3. Niz (a_n) definiran je rekurzijom
$$a_{n+1} = \left(\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} - 2\right) \cdot a_n$$
i početnim uvjetima $a_0 = 1$, $a_1 = a$ za neki $a > 2$. Dokaži da $\forall k \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{a_i} < \frac{1}{2}(2 + a - \sqrt{a^2 - 4}).$$

4. Dva niza realnih brojeva definirana su na sljedeći način: $x_1 = y_1 = \sqrt{3}$,
$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2} \qquad y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}$$
Dokaži da $\forall n > 1$ vrijedi $2 < x_n y_n < 3$.

Bonus (MEMO2012). Niz (a_n) zadan je s $a_0 = 2, a_1 = 4$ i
$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Nađi sve proste brojeve p za koje postoji prirodan broj m takav da $p | (a_m - 1)$.