# Polinomi

Domagoj Ćevid

20.6.2019.

## Zadaci

1. Postoji li polinom $P \in \mathbb{Z}[x]$ takav da vrijedi $P(2) = 1, P(5) = 6$?
2. Dokažite da su sve nultočke polinoma $P(x) = x(x-2)(x-4)(x-6) + (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$ realne.
3. Ako je $P(x) \in \mathbb{Z}$ za sve $x \in \mathbb{Z}$, da li je nužno $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$?
4. Monički polinom $P$ ima stupanj 4 i zadovoljava $P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30$. Izračunajte $P(12) + P(-8)$.
5. Polinom $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ poprima vrijednosti $\pm 1$ u tri različite cjelobrojne točke. Dokažite da on nema cjelobrojnih nultočaka.
6. Dokažite da polinom $x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + \dots$ nema sve realne nultočke.
7. Odredite sve polinome $P \in [x]$ za koje vrijedi $xP(x-1) = (x-3)P(x)$.
8. Neka su $a, b, c$ različiti cijeli brojevi i neka je $P \in \mathbb{Z}[x]$. Može li vrijediti $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$?
9. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dokažite

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

10. Neka je $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + 1$ realan polinom sa nenegativnim koeficijentima, koji ima $n$ realnih nultočaka. Dokažite da je $P(2) > 3^n$.

# Upute za rješenja

1. Promotrite ostatak pri dijeljenju sa 3.
2. Ako za polinom $P \in \mathbb{R}[x]$ i $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $P(x) > 0$ i $P(y) < 0$, onda $P$ ima nultočku između $x$ i $y$.
3. Ne. Na primjer, polinom $\frac{x(x-1)}{2}$ postiže samo cjelobrojne vrijednosti.
4. $P(x) - 10x$ je monički polinom četvrtog stupnja sa nultočkama $1, 2, 3$. To znači da se može zapisati kao $(x-c)(x-1)(x-2)(x-3)$.
5. Koristiti sljedeću tvrdnju. Ako je $P \in \mathbb{Z}[x]$ i $a, b \in \mathbb{Z}$, onda $a - b \mid P(a) - P(b)$.
6. Ako su nultočke $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, imamo iz Vieteovih formula da je $x_1 + \ldots + x_n = -2n$ i da je $\sum_{i<j} x_i x_j = 2n^2$. Iz toga se uz pomoć nejednakosti dobiva kontradikcija.
7. Uvrštavanjem dobivamo da su $0, 1, 2$ nultočke. Supstituirajmo $P(x) = x(x-1)(x-2)Q(x)$. Tada imamo $Q(x) = Q(x-1)$. Dokazati da je onda $Q$ konstantni polinom.
8. Koristiti da ako je $P \in \mathbb{Z}[x]$ i $a, b \in \mathbb{Z}$, onda $a - b \mid P(a) - P(b)$. Analogno vrijedi i za $b - c$ i $c - a$.
9. Lijeva i desna strana su oba kvadratni polinomi. Ako pokažemo da postižu iste vrijednosti u tri točke, znamo da moraju biti jednaki.
10. Možemo zapisati $P(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$. Prvo treba dokazati da su $x_i$ negativni pa ih mozemo zapisati kao $x_i = -a_n$. Iz AG nejednakosti imamo $2 + a_i \geq 3\sqrt[3]{a_i}$, a iz Vieteovih formula imamo $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$