Nejednakosti

Kristina Ana Škreb

4. svibnja 2008.

1 Osnovne nejednakosti i Cauchy-Schwarz

1.1 Nejednakosti među sredinama

Jedne od najvažnijih nejednakosti svakako su nejednakosti među sredinama. Za pozitivne realne brojeve a_1, a_2, ..., a_n definiramo:

- $A_n = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ aritmetička sredina
- $G_n = \sqrt[n]{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ geometrijska sredina
- $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$ harmonijska sredina
- $K_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}$ kvadratna sredina

Među sredinama vrijedi odnos:

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$$

jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

Na sličan način definiramo i sredine s težinama. Neka su $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ pozitivne n-torke realnih brojeva i neka je $W_n = \sum_{i=1}^n w_i$. Tada je:

- $A_n(a; w) = \frac{w_1a_1+w_2a_2+...+w_na_n}{W_n}$ težinska aritmetička sredina brojeva
- $G_n(a; w) = (a_1^{w_1} + a_2^{w_2} + \ldots + a_n^{w_n})^{\frac{1}{W_n}}$ težinska geometrijska sredina
- $H_n(a; w) = \frac{W_n}{\frac{w_1}{a_1}+\frac{w_2}{a_2}+...+\frac{w_n}{a_n}}$ težinska harmonijska sredina
- $K_n = \sqrt{\frac{w_1a_1^2+w_2a_2^2+...+w_na_n^2}{W_n}}$ težinska kvadratna sredina

Među njima takođjer vrijedi odnos:

$$H_n(a; w) \leq G_n(a; w) \leq A_n(a; w) \leq K_n(a; w)$$

jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

Prirodno poopcenje pojma aritmetičke, geometrijske, harmonijske i kvadratne sredine su potencijalne sredine. Za bilo koji realan broj $r \neq 0$ definiramo r-tu potencijalnu sredinu ili sredinu reda r kao:

$$M_r(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_n^r}{n})^{\frac{1}{r}}$$

Još opcenitije ako su $w_1, w_2, \ldots, w_n$ pozitivni realni brojevi čija je suma jednaka 1, možemo definirati r-tu težinsku potencijalnu sredinu kao:

$$M_r(a_1, a_2, \ldots, a_n; w) = (w_1 a_1^r + w_2 a_2^r + \ldots + w_n a_n^r)^{\frac{1}{r}}$$

Vrijedi težinska nejednakost: Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $w_1, w_2, \ldots, w_n$ pozitivni realni brojevi tako da vrijedi $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1$ i r i s realni brojevi različiti od nule takvi da $r \geq s$, onda vrijedi:

$$(\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_n^r}{n})^{\frac{1}{r}} \geq (\frac{a_1^s + a_2^s + \ldots + a_n^s}{n})^{\frac{1}{s}}$$

jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ (Treba uočiti da je obična potencijalna sredina u biti podvrsta težinske potencijalne sredine sa $w_i = \frac{1}{n}$)

1.2 Cauchy-Schwarz nejednakost

Ako su $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nizovi realnih brojeva tada je

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako su nizovi a i b proporcionalni.

1.3 Zadaci

1. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Dokaži da je

$$\frac{x^2}{1+2yz} + \frac{y^2}{1+2xz} + \frac{z^2}{1+2xy} \geq \frac{3}{5}$$

2. Pozitivni realni brojevi x i y zadovoljavaju $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Dokažite da vrijedi $x^3 + y^3 \leq 2$.

3. Neka su x, y, z realni brojevi veci od 1, takvi da je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$$

4. Dokažite da za svaka 2 realna broja $x, y > 1$ vrijedi

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8$$

5. Neka su $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$. Dokažite

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + \ldots + a_n)$$

6. Neka je $n \geq 2$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, dokažite

$$2\sum_{i<j} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i x_i^2}{1 - a_i}$$

7. Za proizvoljne pozitivne realne brojeve a, b, c dokažite nejednakost

$$\frac{a}{b + 2c} + \frac{b}{c + 2a} + \frac{c}{a + 2b} \geq 1$$

8. Dokažite da za sve realne brijeve $x_1, \ldots, x_n$ vrijedi

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + \ldots + \frac{x_n}{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2} < \sqrt{n}$$

2 Monotono preuređenje vektora i Čebiševljeva nejednakost

2.1 Monotono preuređenje vektora

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dva rastuca niza realnih brojeva, tj. $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. Tada za bilo koju permutaciju $(a_1^{'}, \ldots, a_n^{'})$ od $(a_1, \ldots, a_n)$ vrijedi

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geq a_1^{'}b_1 + a_2^{'}b_2 + \ldots + a_n^{'}b_n \geq a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \ldots + a_1b_n$$

2.2 Čebiševljeva nejednakost

Posljedica monotonog preuređenja vektora je i Čebiševljeva nejednakost: Neka su $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ (ili $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$), tada vrijedi:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}$$

Ako su nizovi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ suprotno uređeni (to znači da je jedan rastuci, a drugi padajuci), onda vrijedi suprotna nejednakost.

2.3 Schurova nejednakost

Ako su x, y, z pozitivni realni brojevi i a realan broj, tada vrijedi

$$x^a(x-y)(x-z) + y^a(y-z)(y-x) + z^a(z-x)(z-y) \geq 0$$

s jednakošcu ako i samo ako je $x = y = z$

Dokaz:

Nejednakost je simetrična, pa možemo pretpostaviti poredak. Bez smanjenja opcenitosti $x \geq y \geq z$

1.slučaj: $a \geq 0$

$x^a(x-y)(x-z)+y^a(y-z)(y-x)+z^a(z-x)(z-y) = (x-y)(x^a(x-z)-y^a(y-z))+z^a(z-x)(z-y) \geq$ (zato što je $x \geq y$) $\geq (x-y)((x^a-y^a)(y-z))+z^a(x-z)(y-z) \geq$ (zato što su svi faktori ≥ 0) ≥ 0

2.slučaj: $a < 0$

$x^a(x-y)(x-z)+y^a(y-z)(y-x)+z^a(z-x)(z-y) = x^a(x-y)(x-z)+(y-z)(y^a(y-x)+z^a(x-z)) = x^a(x-y)(x-z)+(y-z)(-y^a(x-y)+z^a(x-z)) \geq$ (zato što je $(x-y) \geq (x-z)$) $\geq x^a(x-y)(x-z)+(y-z)(-y^a+z^a)(x-z) \geq$ (zato što su svi faktori ≥ 0) ≥ 0

2.4 Zadaci

1. Neka su $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$ i $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ jedna permutacija od $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

2. Neka su $x_1, \ldots, x_n$ različiti prirodni brojevi. Dokažite

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$, dokažite da vrijedi

$$a^3 + b^3 + c^3 + (ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 \geq 2(a^2b + b^c + c^2a)$$

4. Neka su x_1, x_2, x_3, x_4 pozitivni realni brojevi takvi da je $x_1x_2x_3x_4 = 1$. Dokažite da

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geq max\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\}$$

5. Dokazati da za sve $x, y, z > 0$ vrijedi

$$\frac{x^3}{y^2 - yz + z^2} + \frac{y^3}{z^2 - zx + x^2} + \frac{z^3}{x^2 - xy + y^2} \geq x + y + z$$

6. Neka su $a, b, c > 0$ takvi da je $a + b + c = 1$. Dokažite

$$ab + bc + ca \leq \frac{1 + 9abc}{4}$$

3 Rješenja

1. Stavimo $w_1 = x^2, w_2 = y^2, w_3 = y^2$, pa vrijedi $w_1 + w_2 + w_3 = 1$. Isto tako stavimo $a_1 = \dfrac{1}{1+2yz}, a_2 = \dfrac{1}{1+2zx}, a_1 = \dfrac{1}{1+2xy}$. Koristeci težinsku nejednakost $M_1(a;w) \geq M_{-1}(a;w)$ dobivamo $\dfrac{x^2}{1+2yz} + \dfrac{y^2}{1+2zx} + \dfrac{z^2}{1+2xy} = w_1a_1 + w_2a_2 + w_3a_3 \geq (w_1a_1^{-1} + w_2a_2^{-1} + w_3a_3^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{x^2+2x^2yz+y^2+2xy^2z+z^2+2xyz^2} = \dfrac{1}{1+2xyz(x+y+z)}$

   Vrijedi $\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq^{A-G} \dfrac{x^2+y^2+z^2}{3} = \dfrac{1}{3}$ i $\dfrac{x+y+z}{3} \leq^{A-K} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$
   $\Rightarrow xyz(x+y+z) \leq (\dfrac{1}{3})^{\frac{3}{2}} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{3}} = (\dfrac{1}{3})^{\frac{3}{2}} \cdot (\dfrac{1}{3})^{\frac{-1}{2}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{1+2xyz(x+y+z)} \geq \dfrac{1}{1+\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{5}$.

2. Dokazat cemo ekvivalentnu tvrdnju, tj. $x^3 + y^3 > 2 \Rightarrow x^2 + y^3 < x^3 + y^4$
   Težinska nejednakost: $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} \leq \sqrt[3]{\dfrac{x^3+y^3}{2}}$
   $\Rightarrow x^2 + y^2 \leq (x^3+y^3)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{2} < (x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}} = x^3 + y^3$
   $\Rightarrow x^2 - x^3 < y^3 - y^2 \quad (1)$
   Isto tako vrijedi: $y^2(1-y)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2(y^2-2y+1) \geq 0 \Rightarrow y^4 - y^3 \geq y^3 - y^2 \quad (2)$
   Iz (1) i (2) slijedi $x^2 - x^3 < y^3 - y^2 \leq y^4 - y^3 \Rightarrow x^2 + y^3 < x^3 + y^4$.

3. $((\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}})^2 + (\dfrac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y}})^2 + (\dfrac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}})^2)((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2) \geq^{Cauchy-Schwarz} (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$
   $\Leftrightarrow (\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{y-1}{y} + \dfrac{z-1}{z})(x+y+z) \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$
   $\Leftrightarrow (1 - \dfrac{1}{x} + 1 - \dfrac{1}{y} + 1 - \dfrac{1}{z})(x+y+z) \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$
   $\Leftrightarrow (x+y+z) \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$
   $\Leftrightarrow \sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$

4. Vrijedi $(x-2)^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 \geq 4(x-1) \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2$

$\dfrac{x^2}{y-1} + \dfrac{y^2}{x-1} \geq^{A-G} 2 \cdot \dfrac{xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}} = 2 \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{y-1}} \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

5. Neka je $S_a = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i^2}{a_i + b_i}, S_b = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{b_i^2}{a_i + b_i}$

$S_a - S_b = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i^2 - b_i^2}{a_i + b_i} = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i = 0 \Rightarrow S_a = S_b$

Sada imamo, $2S_a = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i^2 + b_i^2}{a_i + b_i} \geq^{(*)} \dfrac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(a_i + b_i)^2}{a_i + b_i} = \dfrac{1}{2} \cdot (\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow$

$S_a \geq \dfrac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$

$(*)$ vrijedi jer $a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2} \cdot (a+b)^2$

6. Ako je $\sum_{i=1}^{n} = x_i \Rightarrow 1 = (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j$

Naša nejednakost je ekvivalentna

$2 \sum_{i<j} x_i x_j \leq 1 - \dfrac{1}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i x_i^2}{1 - a_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j - \dfrac{1}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i x_i^2}{1 - a_i}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n-1} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i x_i^2}{1 - a_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 (1 + \dfrac{a_i}{1 - a_i}) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{1 - a_i}$

A prema Cauchy-Schwarzu je $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{1 - a_i} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)}_{n-1} \geq \underbrace{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}_{1}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{1 - a_i} \geq \dfrac{1}{n-1}$

7. Stavimo $x = b + 2c, y = c + 2a, z = a + 2b$. Onda vrijedi $\dfrac{a}{b+2c} + \dfrac{b}{c+2a} + \dfrac{c}{a+2b} =$

$\dfrac{1}{9}(\dfrac{9a}{b+2c} + \dfrac{9b}{c+2a} + \dfrac{9c}{a+2b}) \geq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{9a}{b+2c} + \dfrac{9b}{c+2a} + \dfrac{9c}{a+2b} \geq 9$

$\Leftrightarrow \dfrac{9a}{b+2c} + 2 + \dfrac{9b}{c+2a} + 2 + \dfrac{9c}{a+2b} + 2 \geq 15$

$\Leftrightarrow \dfrac{9a+2b+4c}{b+2c}+\dfrac{9b+2c+4a}{c+2a}+\dfrac{9c+2a+4b}{a+2b}\geq 15$

$\Leftrightarrow \dfrac{4(2a+c)+(a+2b)}{b+2c}+\dfrac{4(2b+a)+(b+2c)}{c+2a}+\dfrac{4(2c+b)+(b+2a)}{a+2b}\geq 15$

$\Leftrightarrow 4\cdot\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}+4\cdot\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{y}+4\cdot\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}\geq 15$

$\Leftrightarrow (\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x})+(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y})+(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z})+3(\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z})\geq 15$

Zadnja nejedanakost se dobije korištenjem A-G nejednakosti posebno na svaki član u zagradi.

8. Stavimo $a_i=1, b_i=\dfrac{x_i}{1+x_1^2+\ldots+x_i^2}$

$(1\cdot\dfrac{x_1}{1+x_1^2}+1\cdot\dfrac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\ldots+1\cdot\dfrac{x_n}{1+x_1^2+\ldots+x_n^2}=(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\leq^{Cauchy-Schwarz}\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}=\sqrt{n}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$

Znači dovoljno nam je dokazati $\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}<1$

Za $i\geq 2,\quad b_i^2=(\dfrac{x_i}{1+x_1^2+\ldots+x_i^2})^2=\dfrac{x_i^2}{(1+x_1^2+\ldots+x_i^2)^2}\leq$

$\dfrac{x_i^2}{(1+x_1^2+\ldots+x_{i-1}^2)(1+x_1^2+\ldots+x_i^2)}=\dfrac{1}{1+x_1^2+\ldots+x_{i-1}^2}-\dfrac{1}{1+x_1^2+\ldots+x_i^2}$

Za $i=1,\quad b_1^2=\dfrac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2}\leq\dfrac{x_1^2}{1+x_1^2}=1-\dfrac{1}{1+x_1^2}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n b_i^2=\sum_{i=1}^n(\dfrac{x_i}{1+x_1^2+\ldots+x_i^2})^2\leq\sum_{i=1}^n(\dfrac{1}{1+x_1^2+\ldots+x_{i-1}^2}-\dfrac{1}{1+x_1^2+\ldots+x_i^2})=$
$1-\dfrac{1}{1+x_1^2+\ldots+x_n^2}<1$

9. Nejednakost možemo pojednostavniti na:

$\sum_{i=1}^n x_i^2-2\sum_{i=1}^n x_iy_i+\sum_{i=1}^n y_i^2\leq\sum_{i=1}^n x_i^2-2\sum_{i=1}^n x_iz_i+\sum_{i=1}^n z_i^2$

$(z_1,\ldots,z_n)$ je permutacija od $(y_1,\ldots,y_n)\Rightarrow\sum_{i=1}^n y_i^2=\sum_{i=1}^n z_i^2$

Naša nejednakost zbog toga vrijedi ako i samo ako $\sum_{i=1}^n x_iz_i\leq\sum_{i=1}^n x_iy_i$, a to je upravo monotono preuređenje vektora.

10. Neka je $(a_1,\ldots,a_n)$ premutacija od $(x_1,\ldots,x_n)$ takva da je $a_1 \leq \ldots \leq a_n$.
Neka je $(b_1,b_2,\ldots,a_n) = (\frac{1}{n^2},\frac{1}{(n-1)^2},\ldots,\frac{1}{1^2})$, $\quad b_i = \frac{1}{(n+1-i)^2}$,a $(a_1^{'},a_2^{'},\ldots,a_n^{'})$ permutacija od $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ takva da je $a_i^{'} = x_{n+1-i}$.
Prema monotonom preuređenju vektora je $\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\ldots+\frac{x_n}{n^2} = a_1^{'}b_1+a_2^{'}b_2+\ldots+a_n^{'}b_n \geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1 = \frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{n^2}$
Kako je $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2,\ldots,a_n \geq n$, vrijedi:
$\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\ldots+\frac{x_n}{n^2} \geq \frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1^2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$

11. Nejednakost je ciklička, pa možemo pretpostaviti da je a najveci element.

1.slučaj:
$a \geq b \geq c \Rightarrow a^2 \geq b^2 \geq c^2$
Iskoristimo monotono preuređenje vektora i dobijemo
$a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a \quad (1)$
Isto tako vrijedi $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{c^2}$ i ako opet iskoristimo monotono preuređenje vektora dobijemo $(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3 = \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3} \geq \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{c}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{b} = \frac{a^2b^2c^2}{a^2c}+\frac{a^2b^2c^2}{b^2a}+\frac{a^2b^2c^2}{c^2a} = a^2b+b^2c+c^2a \quad (2)$
$(1)+(2) \Rightarrow a^3+b^3+c^3+(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3 \geq 2(a^2b+b^2c+c^2a)$

2.slučaj:
$a \geq c \geq b \Rightarrow a^2 \geq c^2 \geq b^2$
Iskoristimo monotono preuređenje vektora i dobijemo
$a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a \quad (1)$
Isto tako vrijedi $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{b^2}$ i ako opet iskoristimo monotono preuređenje vektora dobijemo $(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3 = \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3} \geq \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{c}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{b} = \frac{a^2b^2c^2}{a^2c}+\frac{a^2b^2c^2}{b^2a}+\frac{a^2b^2c^2}{c^2a} = a^2b+b^2c+c^2a \quad (2)$
$(1)+(2) \Rightarrow a^3+b^3+c^3+(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3 \geq 2(a^2b+b^2c+c^2a)$

12. Označimo $X = \sum_{i=1}^{4} x_i^3, X_i = X - x_i$

Vrijedi $X = \dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{4} X_i$

$\dfrac{1}{3}X_1 = \dfrac{1}{3}(x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) \geq^{A-G} \sqrt[3]{x_2^3 x_3^3 x_4^3} = x_2 x_3 x_4 = \dfrac{1}{x_1}$

Analogno $\dfrac{1}{3}X_2 \geq \dfrac{1}{x_2}, \dfrac{1}{3}X_3 \geq \dfrac{1}{x_3}, \dfrac{1}{3}X_4 \geq \dfrac{1}{x_4} \Rightarrow X = \sum_{i=1}^{4} X_i \geq \sum_{i=1}^{4} \dfrac{1}{x_i}$

Čebiševljeva nejednakost: $\dfrac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3}{4} \geq \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4} \cdot \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$,

a zbog $\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4} \geq \sqrt[4]{x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2} = 1 \Rightarrow X \geq \sum_{i=1}^{4} x_i$

13. $\left(\dfrac{x^3}{y^2 - yz + z^2} + \dfrac{y^3}{z^2 - zx + x^2} + \dfrac{z^3}{x^2 - xy + y^2}\right) \cdot (x(y^2 - yz + z^2) + y(z^2 - zx + x^2) +$
$z(x^2 - xy - y^2)) \geq^{Cauchy-Schwarz} (x^2 + y^2 + z^2)^2$
Dovoljno nam je dokazati
$\dfrac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x(y^2 - yz + z^2) + y(z^2 - zx + x^2) + z(x^2 - xy - y^2)} \geq x + y + z$
$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq (x + y + z)[x(y^2 - yz + z^2) + y(z^2 - zx + x^2) + z(x^2 - xy - y^2)]$
$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2)$
$\Leftrightarrow x^2(x - y)(x - z) + y^2(y - z)(y - x) + z^2(z - x)(z - y) \geq 0$, a ova posljednja nejednakost je Schur za $a = 2$.

14. Schur: $a(a - b)(a - c) + b(b - a)(b - c) + c(c - a)(c - b) \geq 0$
$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - (a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 3abc \geq 0$
$((a + b + c)^3 = 1 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 1 - 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) - 6abc)$
$\Leftrightarrow 1 - 4(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) - 3abc \geq 0$
$\Leftrightarrow 1 - 4(ab(a + b + c) + ac(a + b + c) + bc(a + b + c) - 3abc) - 3abc \geq 0$
$\Leftrightarrow 1 - 4(ab + bc + ca) + 9abc \geq 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{1 + 9abc}{4} \geq ab + bc + ca$