2. Hrvatska juniorska matematička olimpijada

rješenja zadataka

Zadatak 1. Dokaži da za sve realne brojeve a, b, c veće ili jednake 1 vrijedi

$$3abc + a + b + c \geqslant 2(ab + bc + ca).$$

Odredi sve takve a, b, c za koje se postiže jednakost.

Prvo rješenje. Dana nejednakost ekvivalentna je s $3abc+a+b+c-2ab-2bc-2ca \geqslant 0$. Transformirajmo izraz na lijevoj strani:

$$\begin{aligned} 3abc + a + b + c - 2ab - 2bc - 2ca &= \sum_{\text{cyc}} (abc + a - ab - ca) \\ &= \sum_{\text{cyc}} a(bc + 1 - b - c) \\ &= \sum_{\text{cyc}} a(b-1)(c-1). \end{aligned}$$

Stoga je dana nejednakost ekvivalentna s

$$a(b-1)(c-1) + b(c-1)(a-1) + c(a-1)(b-1) \geqslant 0,$$

a to očito vrijedi za sve $a, b, c \geqslant 1$ jer su sva tri pribrojnika nenegativna.
Da bi vrijedilo $a(b-1)(c-1) + b(c-1)(a-1) + c(a-1)(b-1) = 0$, moralo bi biti

$$a(b-1)(c-1) = b(c-1)(a-1) = c(a-1)(b-1) = 0,$$

a to zbog $a, b, c \geqslant 1$ znači da barem dva od brojeva a, b, c moraju biti jednaka 1.

Drugo rješenje. Supstitucijom $x = a-1$, $y = b-1$, $z = c-1$ uvjet $a, b, c \geqslant 1$ prelazi u $x, y, z \geqslant 0$, a dana nejednakost transformira se u

$$3xyz + xy + yz + zx \geqslant 0,$$

koja je očito zadovoljena.
Kako su svi pribrojnici nenegativni, jednakost vrijedi ako i samo ako je svaki od pribrojnika jednak 0, a to je istina ako i samo ako su barem dva od brojeva x, y i z jednaka 0, odnosno ako i samo ako su barem dva od brojeva a, b i c jednaka 1.

Zadatak 2. Na zabavu je došlo 100 osoba među kojima se neke poznaju. Sva poznanstva su uzajamna, a za vrijeme trajanja zabave ne sklapaju se nova poznanstva.
Za vrijeme zabave gong je udario sto puta. Nakon prvog udara gonga odlaze svi koji ne poznaju nikog od ostalih sudionika. Nakon drugog udara gonga odlaze svi koji poznaju točno jednog od preostalih sudionika. Nakon trećeg udara gonga zabavu napuštaju svi koji poznaju točno dva sudionika koja su još na zabavi. Analogno se nastavlja dalje –

nakon k-tog udara gonga odlaze svi koji poznaju točno $k-1$ osoba koje su još na zabavi. Konačno, nakon stotog udara gonga, odlaze svi koji poznaju točno 99 preostalih sudionika. Na kraju je ostalo n osoba. Koje vrijednosti može poprimiti broj n?

Rješenje. Dokazat ćemo da n može biti $0, 1, 2, 3, \ldots, 98$. Prvo opisujemo situaciju u kojoj je nakon zadnjeg udara gonga ostalo točno n osoba.

Za $n > 0$, podijelimo svih 100 osoba u grupe A i B. Neka se u grupi A nalazi n osoba i pretpostavimo da te osobe poznaju svih 99 preostalih sudionika zabave. U skupu B nalazi se $100 - n$ osoba koje se ne poznaju međusobno, ali koje poznaju sve osobe u grupi A (stoga svaka osoba u grupi B ima n poznanstava).

Nakon $(n+1)$-og udara gonga, odlaze sve osobe iz grupe B, zbog čega osobe u grupi A nadalje imaju točno $n-1$ poznanstvo. Budući da je n-ti udarac gonga već prošao, slijedi da će sve osobe iz grupe A ostati do kraja zabave.

Vrijednost $n = 0$ postiže se kad se sve osobe međusobno poznaju (pa će svi otići nakon 100. udara gonga).

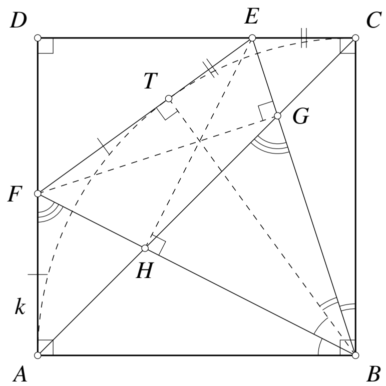
Lako je primijetiti da je $n < 100$ jer osoba s najmanje poznanstava sigurno mora otići sa zabave.

Konačno, pokažimo da ni $n = 99$ nije moguće. Pretpostavimo suprotno, tj. da točno jedna osoba X ode sa zabave prije kraja. Kao ranije, ta osoba ima najmanje poznanstava. Budući da nitko od preostalih ljudi nije otišao nakon X, zaključujemo da svi poznaju X – naime, da neka osoba Y ne poznaje X, onda se broj osoba koje Y poznaje ne mijenja s odlaskom X-a, pa bi i Y morala otići u nekom trenutku. To pokazuje da X ima 99 poznanstava, pa i svi ostali imaju 99 poznanstava, što je kontradikcija.

Zadatak 3. Neka je $ABCD$ kvadrat i k kružnica sa središtem u točki B koja prolazi točkama A i C, te neka je T točka na kružnici k unutar danog kvadrata. Tangenta na kružnicu k u točki T siječe dužine $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ redom u točkama E i F. Neka su G i H redom sjecišta pravaca BE i BF s dužinom $\overline{AC}$.

Dokaži da pravci BT, EH i FG prolaze istom točkom.

Rješenje. Točke A, C i T leže na kružnici k, a pravci AD, CD i EF su tangente na k u tim točkama. Budući da je B središte, a EF tangenta u T, vrijedi $BT \perp EF$.



Uočimo da su A i T dirališta tangenti povučenih iz točke F na kružnicu k, pa vrijedi $|AF| = |FT|$. Sada vidimo da su trokuti ABF i TBF sukladni. Analogno je $|ET| = |EC|$ i trokuti BCE i BTE su sukladni.

Označimo $\sphericalangle ABF = \sphericalangle FBT = \alpha$ i $\sphericalangle CBE = \sphericalangle EBT = \beta$. Kako je $\sphericalangle ABC = 2\alpha + 2\beta$, slijedi $\alpha + \beta = 45°$.

Vrijedi $\sphericalangle AFB = 90° - \sphericalangle ABF = 90° - \alpha = 45° + \beta$.

Kako je $\sphericalangle AGB$ vanjski kut trokuta BCG, vrijedi $\sphericalangle AGB = \sphericalangle GBC + \sphericalangle BCA = \beta + 45°$. Dakle, $\sphericalangle AGB = \sphericalangle AFB$.

Kako su F i G s iste strane pravca AB, iz $\sphericalangle AGB = \sphericalangle AFB$ slijedi da točke A, B, F i G leže na istoj kružnici, tj. da je četverokut $ABGF$ tetivan. Stoga je $\sphericalangle BGF = 180° - \sphericalangle BAF = 90°$. Dakle, dokazali smo da je $FG \perp BE$.

Analogno se pokazuje da je četverokut $BCEH$ tetivan te $EH \perp BF$.

Dokazali smo da su dužine $\overline{FG}$ i $\overline{EH}$ visine trokuta BEF, a kako je i $\overline{BT}$ visina tog trokuta, zaključujemo da se pravci FG, EH i BT sijeku u jednoj točki, ortocentru tog trokuta.

Zadatak 4. Odredi sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$ za koje postoje neparni prirodni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (ne nužno različiti) takvi da je

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

kvadrat nekog prirodnog broja.

Rješenje. Za početak istaknimo dvije tvrdnje koje ćemo koristiti u rješenju.

(i) Ako je m paran broj, tada je m^2 djeljiv s 4.

(ii) Ako je m neparan broj, tada je $m^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

Tvrdnja (i) očito vrijedi.

Neparan broj m možemo zapisati u obliku $m = 2k + 1$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$. Tada je $m^2 = (2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1$, pa kako je broj $k(k+1)$ paran, slijedi tvrdnja (ii).

Prema (ii), kvadrat svakog neparnog prirodnog broja pri dijeljenju s 8 daje ostatak 1, pa je ostatak pri dijeljenju zbroja $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ s 8 jednak ostatku pri dijeljenju broja n s 8.

Prema (i) i (ii), kvadrat prirodnog broja pri dijeljenju s 8 daje ostatak iz skupa $\{0, 1, 4\}$. Da bi zbroj $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ bio potpun kvadrat, nužno je da njegov ostatak pri dijeljenju s 8 bude 0, 1 ili 4, a to onda znači da broj n pri dijeljenju s 8 mora davati jedan od tri navedena ostatka.

Sljedećim primjerima pokazujemo da svi takvi brojevi n imaju svojstvo opisano u zadatku:

- Za brojeve n koji pri dijeljenju s 8 daju ostatak 0 ili 4, odnosno $n = 4t, t \in \mathbb{N}$, neka je $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 1$ i $a_n = 2t - 1$, te je zaista

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = (n-1) \cdot 1^2 + (2t-1)^2 = (4t-1) + (4t^2 - 4t + 1) = (2t)^2.$$

- Za $n = 8t + 1, t \in \mathbb{N}$, neka je $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 1$ i $a_n = 2t - 1$, te je zaista

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = (n-1) \cdot 1^2 + (2t-1)^2 = 8t + (4t^2 - 4t + 1) = (2t+1)^2.$$