



2. HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Zagreb, 15. svibnja 2018.

1. Dokaži da za sve realne brojeve a, b, c veće ili jednake 1 vrijedi

$$3abc + a + b + c \geq 2(ab + bc + ca).$$

Odredi sve takve a, b, c za koje se postiže jednakost.

2. Na zabavu je došlo 100 osoba među kojima se neke poznaju. Sva poznanstva su uzajamna, a za vrijeme trajanja zabave ne sklapaju se nova poznanstva.

Za vrijeme zabave gong je udario sto puta. Nakon prvog udara gonga odlaze svi koji ne poznaju nikog od ostalih sudionika. Nakon drugog udara gonga odlaze svi koji poznaju točno jednog od preostalih sudionika. Nakon trećeg udara gonga zabavu napuštaju svi koji poznaju točno dva sudionika koja su još na zabavi. Analogno se nastavlja dalje – nakon k -tog udara gonga odlaze svi koji poznaju točno $k - 1$ osoba koje su još na zabavi. Konačno, nakon stotog udara gonga, odlaze svi koji poznaju točno 99 preostalih sudionika.

Na kraju je ostalo n osoba. Koje vrijednosti može poprimiti broj n ?

3. Neka je $ABCD$ kvadrat i k kružnica sa središtem u točki B koja prolazi točkama A i C , te neka je T točka na kružnici k unutar danog kvadrata. Tangenta na kružnicu k u točki T siječe dužine \overline{CD} i \overline{DA} redom u točkama E i F . Neka su G i H redom sjecišta pravaca \overline{BE} i \overline{BF} s dužinom \overline{AC} .

Dokaži da pravci BT , EH i FG prolaze istom točkom.

4. Odredi sve prirodne brojeve $n \geq 2$ za koje postoje neparni prirodni brojevi a_1, a_2, \dots, a_n (ne nužno različiti) takvi da je

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

kvadrat nekog prirodnog broja.

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.