Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2019.

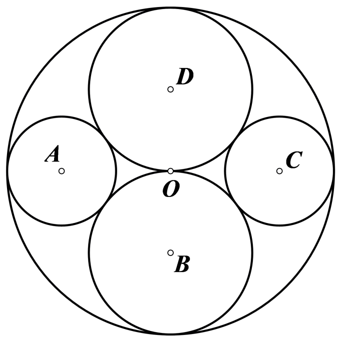
1. Riješite u skupu realnih brojeva nejednadžbu

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}} \leqslant 2019.$$

2. Ako je $\dfrac{a}{a+b^2}+\dfrac{b}{b+a^2}=\dfrac{4}{5}$ i $ab=-1$, koliko je a^9+b^9 ?

3. Odredite zadnje dvije znamenke broja $\underbrace{6^{6^{6^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{6}}}}}}}_{2019}$.

4. U kružnicu k sa središtem u točki O i polumjera 6 cm, upisane su dvije veće kružnice sa središtima B i D, te dvije manje kružnice sa središtima A i C, kao na slici. Ove 4 kružnice dodiruju kružnicu k. Veće se kružnice međusobno dodiruju u točki O, a dvije manje kružnice dodiruju veće kružnice. Odredite površinu četverokuta $ABCD$.



5. Odredite najmanju vrijednost izraza $2x^2+\dfrac{1}{2}y^2$ ako je $y+2x=2$.

6. Bazen se može napuniti s dvije slavine. Ako su obje slavine otvorene 2 sata, 4200 litara vode će nedostajati da bazen bude pun do vrha, a ako se obje drže otvorene 5 sati, bazen će biti pun do vrha i još će 3000 litara vode iscuriti izvan bazena. Prva slavina u bazen ispusti u dva sata onoliko vode koliko druga slavine ispusti u tri sata. Koliko litara vode stane u bazen i koliko je vremena potrebno da svaka slavina sama napuni bazen? (Brzine kojom slavine pune bazen su konstantne.)

7. Na svakom kuponu proljetne lutrije uz natpis proljetni broj piše jedan niz od sedam znamenaka, od 0000000 do 9999999. Ako se kupon zarotira za 180°, znamenke 0 i 8 se ne mijenjaju, znamenke 6 i 9 prelaze jedna u drugu, a sve ostale znamenke gube smisao. Tako će proljetni broj 9980896 rotacijom prijeći u 9680866. Takve kupone, čiji proljetni brojevi rotacijom za 180° mijenjaju svoju dekadsku vrijednost, smatramo nevažećima. Koliko je nevažećih kupona?
(Napomena: Kupon s proljetnim brojem 8680898 ili 0808080 je važeći kupon.)

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2019.

1. Odredite sve realne brojeve k za koje je jedno rješenje jednadžbe

$$(x-2k)^2 = k(x+2)$$

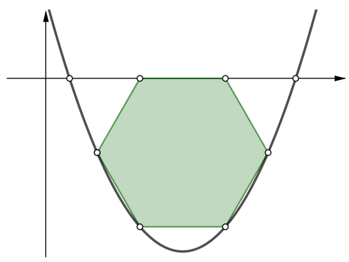
za 1 veće od drugoga.

2. U trokutu ABC mjere kutova pri vrhu A i pri vrhu C redom iznose $\alpha = 60°$ i $\gamma = 75°$. Izračunajte udaljenost ortocentra trokuta ABC od vrha B ako je $|BC| = 8\sqrt{6}$.

3. Iz kocke duljine brida $a > 1$, izrezana je u jednom njezinom vrhu kocka duljine brida $\frac{1}{a}$. Odredite a tako da obujam novonastalog tijela iznosi $V = 4\left(a - \frac{1}{a}\right)$.

4. Matko je na papiru zapisao pet različitih brojeva, a kada ga je Ana upitala koji su to brojevi rekao je: "Odabereš li bilo koja četiri od pet zapisanih brojeva, njihov će umnožak biti jedan od brojeva 9, 12, 18, 24, 36". Koje je brojeve Matko zapisao?

5. Pravilni šesterokut upisan je u parabolu tako da su mu dva vrha na osi x, a preostala četiri vrha na paraboli, kao na slici. Koliko su međusobno udaljena sjecišta parabole s osi x, ako je duljina stranice pravilnog šesterokuta jednaka 2?



6. Riješite jednadžbu $iz^2 + 2\bar{z} = 0$ u skupu kompleksnih brojeva. Izračunajte kvocijent zbroja kubova i umnoška svih rješenja koja su različita od nule.

7. Odredite prirodni broj k tako da točno 2019 cijelih brojeva zadovoljava sustav nejednadžbi

$$\begin{cases} |x-2| < k \\ (3-x)^2 > 3x+1. \end{cases}$$

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2019.

1. Presjek uspravnog stošca ravninom koja sadrži njegovu os simetrije pravokutan je trokut. Izračunajte oplošje kugle upisane u stožac ako je visina stošca 2 cm.

2. U skupu pozitivnih realnih brojeva riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \sqrt[x-y]{x+y} &= 2\sqrt{3} \\ (x+y)\cdot 2^{y-x} &= 3. \end{aligned}$$

3. Unutar kuta $\sphericalangle pOq$ mjere 60° odabrana je točka A tako da je od jednog kraka udaljena za 1 cm a od drugog kraka 2 cm. Izračunajte duljinu dužine $\overline{OA}$.

4. Četiri su prijateljice odlučile provesti vikend u malom obiteljskom hotelu koji ima pet soba, stilski uređenih različitim bojama. One su jedine gošće u hotelu. Prepustile su vlasniku hotela da ih rasporedi u sobe, ali tako da ne budu više od dvije prijateljice u jednoj sobi. Na koliko ih načina vlasnik može rasporediti u sobe?

5. Duljine stranica trokuta ABC iznose $|BC| = 4\,\text{cm}$ i $|AC| = 5\,\text{cm}$, a duljina dijela simetrale kuta $\sphericalangle ACB$ koji se nalazi unutar trokuta je $s = \dfrac{10}{3}\,\text{cm}$. Izračunajte duljinu stranice $\overline{AB}$.

6. Za koje vrijednosti realnog parametra a jednadžba $a\sin x - \operatorname{tg} x = 1$ ima rješenje u intervalu $\left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$?

7. Odredite najveći prirodni broj a za koje jednadžba

$$\left|\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)\right| = \frac{1}{a}\,x$$

ima točno 600 različitih rješenja.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2019.

1. Odredite sve prirodne brojeve n za koje vrijedi

$$\frac{(9!n!)^2 - (8!(n+1)!)^2}{(9!n!)^2 - 18 \cdot (8!)^2 n!(n+1)! + (8!(n+1)!)^2} > 0$$

2. Dane su beskonačne sume

$$a = 2020^{x+3} + 2020^{x+2} + 2020^{x+1} + 2020^{x} + \ldots$$

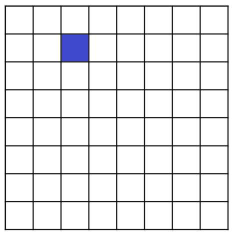
$$b = 2019^{x+2} + 2019^{x+1} + 2019^{x} + 2019^{x-1} + \ldots$$

Odredite $x \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $\dfrac{a}{b} = 2018$.

3. Brojevi $\sin x$ i $\sin 2x$ su prva dva člana geometrijskog niza kojemu su svi članovi različiti od 0. Odredite sve brojeve $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ za koje je treći član toga niza jednak $\sin 4x$.

4. Zadan je kompleksan broj $w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

Izračunajte $(1+w)(1+w^2)(1+w^3)\ldots(1+w^{2019})$.



5. Na kvadratnoj ploči dimenzija 8×8 obojeno je polje u drugom retku i trećem stupcu. Neka je A broj kvadrata $k \times k$, $k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ koji sadrže obojeno polje i B broj kvadrata koji ne sadrže obojeno polje. Odredite omjer $\dfrac{A}{B}$.

6. Neka je ABC pravokutan trokut sa šiljastim kutovima $\sphericalangle CAB = 30^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, a točka T njegovo težište. Odredite kosinus kuta $\sphericalangle ATB$. U kojem su omjeru površina trokuta ABC i površina trokuta ATB?

7. Neka je p pozitivan realan broj, a $y^2 = 2px$ i $x^2 + 4y^2 = 2p^2$ zadane krivulje. Odredite površinu trokuta koji njihove zajedničke tangente zatvaraju s y osi.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.