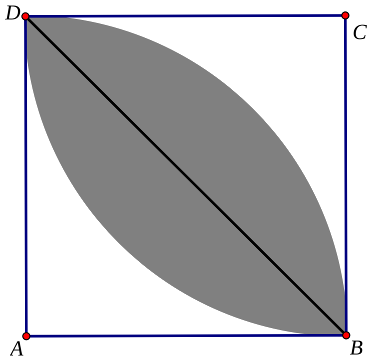
ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. siječnja 2019.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Budući da za duljine stranica trokuta vrijedi $a : b : c = 3 : 5 : 7$, onda postoji (realni) broj k takav da je $a = 3k$, $b = 5k$ i $c = 7k$.
Tada je $3k + 5k + 7k = 210$, iz čega je $k = 14$. 1 BOD
Stranice trokuta duge su 42 cm, 70 cm i 98 cm. 3 BODA
Trokut je pravokutan ako za duljine stranica trokuta vrijedi Pitagorin poučak.
Kako je $42^2 + 70^2 = 6664$, a $98^2 = 9604$, trokut nije pravokutan. 2 BODA
………………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Učenik može pokazati općenitiju tvrdnju, tj. tvrdnju da niti jedan trokut čije su duljine stranica u omjeru 3 : 5 : 7 nije pravokutan. Naime $9k^2 + 25k^2 = 34k^2 \neq 49k^2$, $k > 0$.

2. Prvi način:
„List“ se može prepoloviti dijagonalom kvadrata $\overline{BD}$.



Površina polovice „lista“ jednaka je razlici površine kružnog isječka, koji je zapravo četvrtina kruga sa središtem u točki A i polumjerom $\overline{AB}$ i površine jednakokračnog pravokutnog trokuta ABD.
1 BOD

Ako s a označimo duljinu stranice kvadrata, površina polovice „lista“ je $\frac{a^2\pi}{4} - \frac{a^2}{2}$. 2 BODA

Tada je površina cijelog „lista“ $\frac{a^2\pi}{2} - a^2 = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. 1 BOD

Udio površine „lista“ u kvadratu jednak je omjeru površine lista i površine kvadrata:

$$\frac{a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{a^2} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 1.57 - 1 = 0.57 = 57\ \%$$ 2 BODA

………………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:
Površina kvadrata je a^2. Kvadrat se sastoji od zatamnjenog „lista“ (njegovu površinu označimo s P_1) i nezatamnjenih sukladnih likova ABD i BCD (njihovu površinu označimo s P_2).
Zbroj površina tih triju likova mora biti jednaka površini kvadrata tj. mora vrijediti

$a^2 = P_1 + 2P_2$. (1) 1 BOD

S druge strane, „list“ i nezatamnjeni lik *ABD* čine četvrtinu kruga površine $a^2 \cdot \frac{\pi}{4}$ pa mora biti

$a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = P_1 + P_2$. (2) 1 BOD

Pomnožimo li (2) s 2 i od tako pomnožene druge jednadžbe oduzmemo prvu, dobivamo da je površina „lista“:

$P_1 = \frac{a^2\pi}{2} - a^2$. 2 BODA

Sada, istovjetno kao u prvom načinu rješavanja, zaključujemo kako je udio površine „lista“ u kvadratu približno jednak 57 %. 2 BODA

……………………………………………………………………….….. UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Označimo s e_1 i f_1 duljine dijagonala početnog romba, a s e_2 i f_2 duljine dijagonala romba dobivenog nakon produljenja dijagonala. Tada vrijedi:

$e_1 = f_1 + 14$,

$e_2 = e_1 + 2 = f_1 + 14 + 2 = f_1 + 16$ i

$f_2 = f_1 + 8$. 1 BOD

Vrijedi $P_2 = P_1 + 144$, odnosno $\frac{e_2 \cdot f_2}{2} = \frac{e_1 \cdot f_1}{2} + 144$. 1 BOD

Dalje je $\frac{(f_1+16)\cdot(f_1+8)}{2} = \frac{(f_1+14)\cdot f_1}{2} + 144$, 1 BOD

$(f_1+16)\cdot(f_1+8) = (f_1+14)\cdot f_1 + 288$,

$f_1^2 + 16f_1 + 8f_1 + 128 = f_1^2 + 14f_1 + 288$, 1 BOD

$10f_1 = 160 \Rightarrow f_1 = 16$.

Tada je $e_1 = 16 + 14 = 30$.

Duljine dijagonala romba su 30 cm i 16 cm. 2 BODA

……………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka su e, f duljine dijagonale prvog romba.

Vrijedi $e - f = 14$.

Površina prvog romba je $P_1 = \frac{ef}{2}$. 1 BOD

Duljine dijagonala drugog romba su $e + 2$, $f + 8$,

a površina mu je $P_2 = \frac{(e+2)(f+8)}{2}$. 1 BOD

Vrijedi $P_2 = P_1 + 144$, pa možemo pisati $\frac{(e+2)(f+8)}{2} = \frac{ef}{2} + 144$. 1 BOD

Dalje je

$\frac{ef + 8e + 2f + 16}{2} = \frac{ef}{2} + 144$,

$\frac{ef}{2} + 4e + f + 8 = \frac{ef}{2} + 144 \Rightarrow 4e + f = 136$. 1 BOD

Riješimo sustav jednadžbi:

$e - f = 14$
$\underline{4e + f = 136}$
$e = 30, \ f = 16$
Duljine dijagonala romba su 30 cm i 16 cm. 2 BODA
…………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: U slučaju *sitne* računske pogreške prilikom rješavanja sustava jednadžbi, umjesto 2 BODA, treba dati 1 BOD.

4. Označimo s x broj kilometara koje je Gospodin Perić prešao u petak.
Za taj put trebao bi platiti [20 + 5x] kuna jer u petak nije bilo popusta. 1 BOD
U subotu je gospodin Perić prešao 5 km više, tj. [x + 5] kilometara, što bi bez popusta platio [20 + (5(x + 5))] kuna, tj. [45 + 5x] kuna,
no uz 20 % popusta on plaća 80 % cijene, što znači da plaća [0.8 (45 + 5x)] kuna, odnosno [36 + 4x] kuna. 1 BOD
S obzirom da je u subotu platio isti iznos novca kao u petak, vrijedi jednadžba
$0.8\,(45 + 5x) = 20 + 5x$, 1 BOD
$36 + 4x = 20 + 5x$,
$x = 16$. 1 BOD
Dakle, gospodin Perić je u petak prešao 16 km, a u subotu 21 km. 1 BOD
Za jednu vožnju platio je $20 + 16 \cdot 5 = 20 + 80 = 100$ kuna. 1 BOD
……………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:
Bacanje svakog od simetričnih novčića ima dva moguća ishoda „*palo je pismo*“ ili „*pala je glava*“.
Ukupan broj mogućih ishoda za bacanje četiri simetrična novčića jednak je $2^4 = 16$. 2 BODA
Dva pisma mogu pasti na dva od četiri simetrična novčića na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ različitih načina, pri čemu dvije glave padaju na preostala dva novčića. 2 BODA
Zato je tražena vjerojatnost $p = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\,\%$. 2 BODA
……………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:
Označimo sa P = „palo je pismo“, G = „pala je glava“ ishode bacanja simetričnog novčića.
Ispišimo sve ishode bacanja četiri simetrična novčića:
{*PPPP*, *PPPG*, *PPGP*, *PGPP*, *GPPP*, *PPGG*, *PGGP*, *PGPG*, *GPGP*, *GPPG*, *GGPP*, *PGGG*, *GPGG*, *GGPG*, *GGGP*, *GGGG*} 3 BODA
Povoljni ishodi su:
{*PPGG*, *PGGP*, *PGPG*, *GPGP*, *GPPG*, *GGPP*} 1 BOD
Tražena vjerojatnost je $p = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\%$. 2 BODA
……………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Ukoliko učenik računa vjerojatnost tako da ishode da je palo 0 pisama, 1 pismo, 2 pisma, 3 pisma i 4 pisma tretira jednako vjerojatnima te tako dobije da je vjerojatnost $\frac{1}{5}$, to treba ocijeniti s 0 BODOVA jer je potpuno pogrešno.

6. Prvi način:

$(3a+5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2$ 2 BODA

$= 9(a-b)^2 + 48ab + 16b^2 = 9(a-b)^2 + 16(3ab + b^2)$ 4 BODA

Kako je $a - b$ djeljivo s 4, to je $(a-b)^2$ djeljivo sa 16,
pa je i $9(a-b)^2 + 16(3ab + b^2)$ djeljivo sa 16, jer je $3ab + b^2$ cijeli broj. 4 BODA

……………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik, u pokušaju dokazivanja, napiše rastav $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ i ne uspije to iskoristiti, svejedno treba, za taj rastav, dobiti 1 BOD.

Drugi način:

Iz uvjeta da su a i b cijeli brojevi takvi da je $a - b$ djeljivo s 4, slijedi da a i b imaju iste ostatke pri dijeljenju s 4, tj. da je $a = 4k + i$, $b = 4l + i$, za cijele brojeve k i l te $i = 0,1,2,3$. 3 BODA

Tada je $(3a+5b)^2 = \left(3(4k+i) + 5(4l+i)\right)^2 = (4(3k+5l) + 8i)^2$ 4 BODA

$= 16(3k + 5l + 2i)^2$ što je djeljivo sa 16, jer je $(3k + 5l + 2i)^2$ cijeli broj. 3 BODA

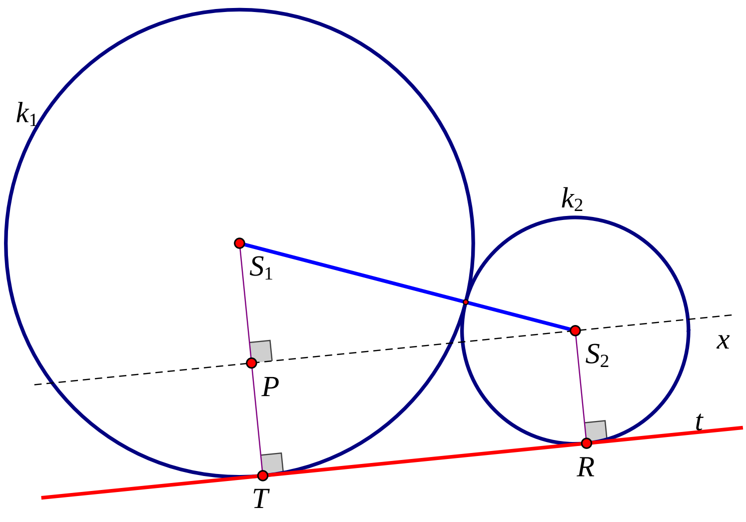
……………………………………………………………………....... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Ako je $a - b$ djeljivo sa 4, onda postoji cijeli broj k takav da je $a - b = 4k$.
Tada je $a = b + 4k$. 2 BODA
Onda je $3a + 5b = 3(b + 4k) + 5b = 8b + 12k$. 2 BODA
Tada je $(3a + 5b)^2 = (8b + 12k)^2 = 64b^2 + 192bk + 144k^2$. 3 BODA
To se može napisati kao $16 \cdot (4b^2 + 12bk + 9k^2)$, pa je djeljivo sa 16. 3 BODA

……………………………………………..………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:



Skica: 1 BOD

Označimo sa S_1 i S_2 središta kružnica k_1 i k_2 redom, kao i njihove polumjere r_1 i r_2. Neka je $r_1 > r_2$. Zadatak se slično rješava i u slučaju $r_2 > r_1$. Točkom S_2 nacrtamo paralelu x s $\overline{TR}$. Neka je P sjecište pravca x i polumjera $\overline{S_1T}$ kružnice k_1.

Tada je trokut S_1S_2P pravokutan, 1 BOD

a četverokut S_2PTR pravokutnik, pri čemu je $|S_2P| = |TR|$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka dobivamo $|TR|=|PS_2|=\sqrt{|S_1S_2|^2-|S_1P|^2}$. (*) 2 BODA

Iskoristimo omjer (2 : 1) između polumjera kružnica k_1 i k_2 kao i pretpostavku da je $r_1 > r_2$. Naime, postoji broj r tako da možemo pisati; $r_1 = 2r$, $r_2 = r$.

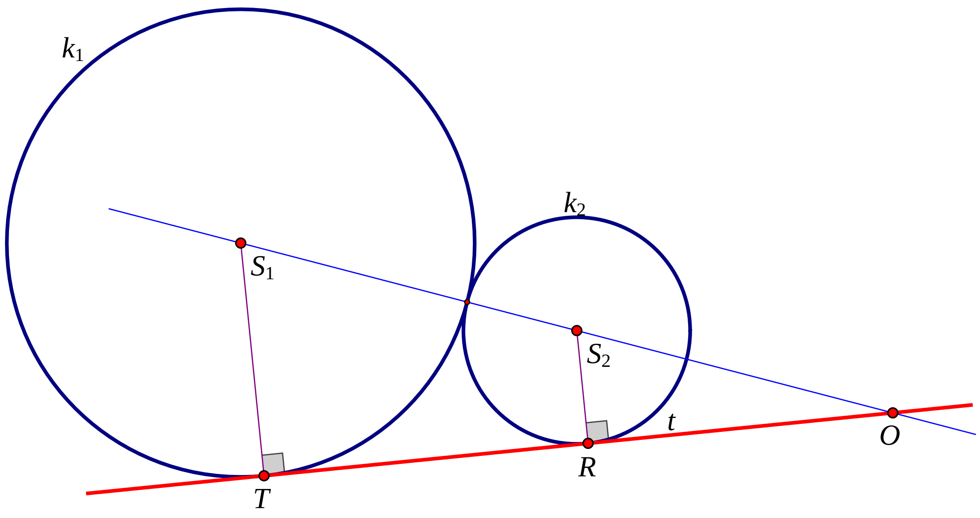
Tada je $|S_1S_2|=3r$. 1 BOD

Uvrštavanjem u (*) dobivamo $|TR|=\sqrt{9r^2-r^2}=\sqrt{8r^2}=2\sqrt{2}r$. 3 BODA

pa je traženi omjer $|TR|:|S_1T| = 2\sqrt{2}r:2r=\sqrt{2}:1$. 1 BOD

…………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



Skica: 1 BOD

Označimo sa S_1 i S_2 središta kružnica k_1 i k_2 redom, kao i njihove polumjere r_1 i r_2. Neka je $r_1 > r_2$. Zadatak se slično rješava i u slučaju $r_2 > r_1$.

Iz uvjeta da je $r_1 : r_2 = 2 : 1$ slijedi da postoji broj r takav da je $r_1 = 2r$, $r_2 = r$.

Središtima S_1 i S_2 nacrtajmo pravac S_1S_2 .

Neka je točka O sjecište tangente TR i pravca S_1S_2 . Prema K-K poučku o sličnosti trokuti ROS_2 i TOS_1 su slični (imaju jedan zajednički kut $\measuredangle TOS_1=\measuredangle ROS_2$ i jedan pravi kut). 2 BODA

Zbog $|S_1T|=2|S_2R|$ vrijedi $|S_1O|=2|S_2O|$, odnosno $|S_2O|=|S_1S_2|=3r$. 2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut ROS_2 dobije se:

$|RO|^2=|OS_2|^2-|S_2R|^2=9r^2-r^2=8r^2$. 3 BODA

Tada je $|TR|=|RO|=\sqrt{8r^2}=2\sqrt{2}r$. 1 BOD

Onda je $|TR|:|S_1T| = 2\sqrt{2}r:2r=\sqrt{2}:1$. 1 BOD

…………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA