

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. siječnja 2019.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka su a, b, c, d, e zadani brojevi.

Iz $\frac{a+b+c}{3} = 19$ slijedi da je $a + b + c = 57$. 1 BOD

Iz $\frac{a+b+c+d+e}{5} = 20$ slijedi da je $a + b + c + d + e = 100$. 1 BOD

Uspoređivanjem se dobije da je $d + e = 43$, a zadano je $d \cdot e = 456$. 1 BOD

Broj 456 rastavimo na proste faktore: $456 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19$. 1 BOD

Kombiniranjem prostih faktora dobijemo brojeve 24 i 19 koji zadovoljavaju uvjet $24 + 19 = 43$.

Posljednja dva broja u nizu su 24 i 19. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Neka je c cijena proizvoda prije obje promjene.

Nakon uvećanja od 10 % cijena proizvoda će biti $c_1 = 110 \% c$, 1 BOD

a nakon smanjenja od 30 % cijena će biti $c_2 = 70 \% c_1$. 1 BOD

Cijena nakon obje promjene bit će $c_2 = 0.7 \cdot 1.1 \cdot c = 0.77 \cdot c = 77 \% c$. 1 BOD

Znači, cijena će nakon obje promjene biti **niža** u odnosu na početnu i to za 23 % (100 % – 77 %). 2 BODA

Cijena nakon obje promjene bit će $0.77 \cdot 2\,019 = 1\,554.63$ kn ili 1 554 kn i 63 lp. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Cijena proizvoda nakon povećanja od 10 % bit će $110 \% \cdot 2\,019 = 2\,220.90$ kn. 1 BOD

Nakon sniženja od 30 % bit će $70 \% \cdot 2\,220.90 = 1\,554.63$ kn. 1 BOD

Razlika cijena prije i nakon obje promjene je $2\,019 - 1\,554.63 = 464.37$ kn, 1 BOD

a to je $p \% = \frac{464.37}{2\,019} = 23 \%$. 2 BODA

Znači, cijena će nakon obje promjene biti **niža** u odnosu na početnu i to za 23 %. 1 BOD

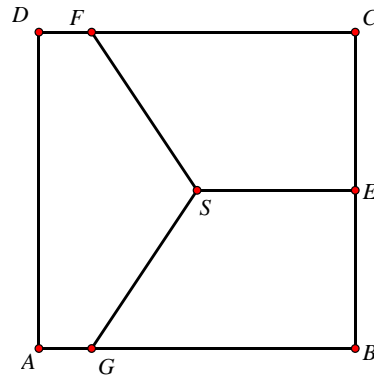
..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Kako su površine triju poligona (dvaju četverokuta i peterokuta) koji tvore kvadrat jednake, onda je

svaka od površina jednaka $\frac{1}{3} \text{ m}^2$. 1 BOD

To posebice znači da je površina trapeza $FCES$ jednaka $\frac{1}{3} \text{ m}^2$.



Iz uvjeta zadatka znamo da je S središte kvadrata i E polovište stranice \overline{BC} , pa mora biti

$$|SE| = |EC| = \frac{1}{2} \text{ m.} \quad 2 \text{ BODA}$$

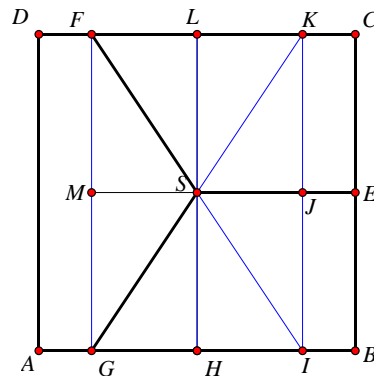
Površina trapeza $FCES$ može se izračunati iz izraza $p_{FCES} = \frac{|FC| + |SE|}{2} \cdot |EC|$,

$$\text{pa slijedi } \frac{1}{4} \cdot \left(|FC| + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{odnosno } |FC| = \frac{5}{6} \text{ m.} \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:



Neka je točka K na stranici \overline{CD} takva da je $|DF| = |KC|$ i točka I na stranici \overline{AB} takva da je $|AG| = |IB|$. Nadalje, neka su točke L i H polovišta dužina \overline{FK} i \overline{GI} , točke M i J sjecišta pravca \overline{ES} sa stranicama pravokutnika $FKIG$.

Prema poučku S-K-S trokuti SLF , SLK , SJK , SMG , SMF su sukladni i imaju jednake površine; označimo tu površinu s P_1 . 1 BOD

Četverokut $AGFD$ je dvaput veće površine od četverokuta $JECK$; označimo njegovu površinu s P_2 . 1 BOD

Iz uvjeta jednakosti površina poligona $SFDAG$ i $SECF$ slijedi da je $2P_1 + 2P_2 = 3P_1 + P_2$, 1 BOD

pa slijedi da je $P_1 = P_2$. 1 BOD

Iz toga slijedi da je $|FL| = |LK| = 2|KC|$. 1 BOD

Kako je $|KC| = |FD|$ i $|FL| + |LK| + |KC| + |FD| = 1$, slijedi da je $|FC| = \frac{5}{6}$ m. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. $\frac{21}{26} = 21 : 26 = 0.8076923\ 076923\ 076923\ \dots = 0.8\dot{0}7692\dot{3}$ 2 BODA

Period ima 6 znamenki (076923). 1 BOD

Prva znamenka iza decimalne točke je 8 i ona se ne ponavlja. 1 BOD

$2019 - 1 = 2018$

$2018 : 6 = 336$ i ostatak 2 1 BOD

2019. znamenka iza decimalne točke je druga znamenka perioda, a to je 7. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

U 5 kg kupljene zemlje ima 88 % suhe tvari, odnosno $5 \cdot 0.88 = 4.4$ kg. 2 BODA

Masa suhe tvari ostat će ista i nakon nadolijevanja vode.

Neka je u 5 kg zemlje dodano x kg (litara) vode.

Tada vrijedi $4.4 = 0.72(5 + x)$. 2 BODA

$\Rightarrow x = \frac{0.8}{0.72} = \frac{80}{72} = \frac{10}{9} = 1.\dot{1}$ litara. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka je x masa vode (kg) koju treba uliti u zemlju.

Tada vrijedi: $5 \cdot 12\% + x \cdot 100\% = (5 + x) \cdot 28\%$, 2 BODA

odnosno $5 \cdot 0.12 + x = 1.4 + 0.28x$. 2 BODA

$\Rightarrow x = \frac{0.8}{0.72} = \frac{80}{72} = \frac{10}{9} = 1.\dot{1}$ litara. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Trošak za fasadu je 1 200 000 kn. Bespovratni dio sredstava iznosi 60% što znači da stanari moraju podmiriti 40% troškova, što iznosi 480 000 kn. 1 BOD

Prosječna godišnja cijena grijanja bila je 168 000 kn, a s uštedom od 35% iznosit će 109 200 kn. 1 BOD

Označimo s n broj godina potrebnih da se investicija isplati. Onda je ukupna cijena za n godina grijanja prije stavljanja nove fasade $168\ 000\ n$, 1 BOD

a ukupna cijena za n godina grijanja nakon postavljanja fasade $109\ 200\ n$. 1 BOD

Treba odrediti najmanji broj godina za koji će trošak grijanja prije stavljanja nove fasade biti veći od zbroja ukupnih troškova grijanja poslije stavljanja fasade i troškova za fasadu koje plaćaju stanari. 1 BOD

Odredimo najmanji prirodni broj n za koji vrijedi:

$168\ 000\ n > 109\ 200\ n + 480\ 000$. 1 BOD

$168\ 000\ n - 109\ 200n > 480\ 000$

$58\ 800n > 480\ 000$ 1 BOD

$n > \frac{480\ 000}{58\ 800}$ 1 BOD

Kako je $\frac{480\,000}{58\,800} \approx 8.2$,

1 BOD

najmanji prirodni broj koji zadovoljava ovaj uvjet je 9, odnosno investicija će se isplatiti za 9 godina.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Budući da je $|OP| = 7$ cm, točka P može imati koordinate 7 ili -7 .

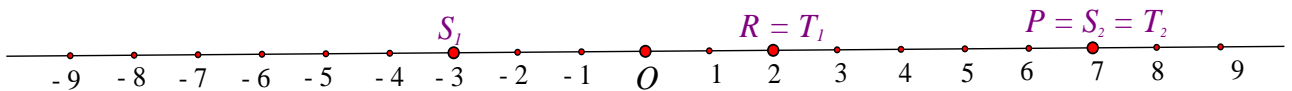
1 BOD

Slično, točka R može imati koordinate 2 ili -2 .

1 BOD

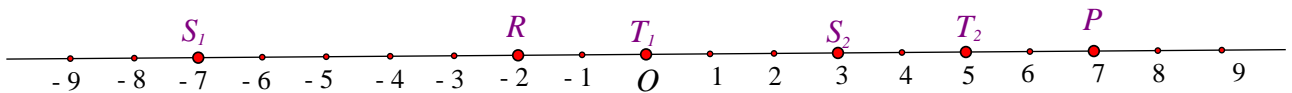
Razlikujemo 4 slučaja:

1. $P(7), R(2) \rightarrow S_1(-3)$ ili $S_2(7) \rightarrow T_1(2)$ ili $T_2(7)$



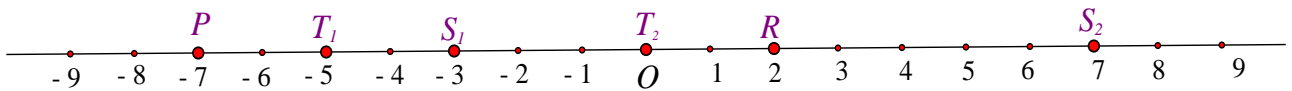
2 BODA

2. $P(7), R(-2) \rightarrow S_1(-7)$ ili $S_2(3) \rightarrow T_1(0)$ ili $T_2(5)$



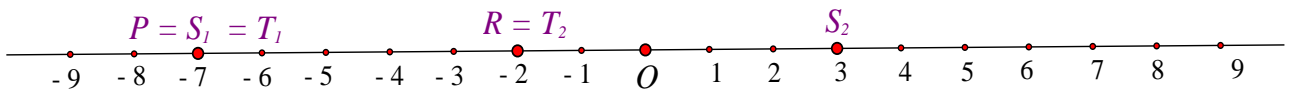
2 BODA

3. $P(-7), R(2) \rightarrow S_1(-3)$ ili $S_2(7) \rightarrow T_1(-5)$ ili $T_2(0)$



2 BODA

4. $P(-7), R(-2) \rightarrow S_1(-7)$ ili $S_2(3) \rightarrow T_1(-7)$ ili $T_2(-2)$



2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA