ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

1. razred – srednja škola – A varijanta

28. siječnja 2019.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve troznamenkaste brojeve sa zbrojem znamenaka 11 od kojih se zamjenom znamenki jedinica i stotica dobiva za 594 veći broj.

Bodovanje: 3 boda ukupno nosi obrazloženi zaključak $c = a + 6$, formulom ili riječima. 1 bod nosi obrazloženje da znamenka stotica mora biti manja od 3. Preostala 2 boda nosi zapisivanje mogućih rješenja.

Zadatak A-1.2.

Neka su a i b pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \qquad \text{i} \qquad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = 10.$$

Odredi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Bodovanje: Dobivanje jednakosti $a + b = 5$ vrijedi 3 boda. Jednakost $ab = 5$ vrijedi 2 boda. Sređivanje do konačnog rješenja nosi 1 bod.

Zadatak A-1.3.

Neka je ABC trokut u kojem je $\sphericalangle CAB = 20^\circ$ i neka je D polovište stranice $\overline{AB}$.

Ako je $\sphericalangle CDB = 40^\circ$, odredi $\sphericalangle ABC$.

Bodovanje: Izračun kuta $\sphericalangle ACD$ nosi 2 boda. Zaključak da je trokut ADC jednakokračan vrijedi 1 bod, a jednakost $|CD| = |BD|$, također nosi 1 bod. Zaključak da je trokut BDC jednakokračan vrijedi 1 bod, a konačno rješenje nosi 1 bod.

Zadatak A-1.4.

Za kvadratnu ploču čija su polja obojena crnom ili bijelom bojom kažemo da je *lijepa* ako se njezin izgled ne mijenja rotacijom za 90°.

Koliko ima različitih lijepih ploča dimenzija 5×5?

Bodovanje: 1 bod nosi komentar da središnje polje ostaje fiksno. 3 boda nosi opis što se događa s ostalim poljima ploče i uočavanje 6 polja koja možemo proizvoljno odabrati, od kojih se 1 bod može dodijeliti ako učenik analizira jedno polje i uoči četiri polja koja moraju biti iste boje. Konačno, 2 boda nosi prebrojavanje: 1 bod za množenje s 2 za svako polje koje možemo proizvoljno odabrati i 1 bod za konačni rezultat.

Zadatak A-1.5.

Odredi sve parove (m, n) cijelih brojeva za koje vrijedi $mn + 5m + 2n = 121$.

Bodovanje: 2 boda nosi faktorizacija, 2 boda određivanje svih slučajeva koristeći da je 131 prost broj, te 2 boda dobivanje svih rješenja.

Ako učenik ispiše rješenja bez obrazloženja, ukupno dobiva 2 boda. Ako učenik ne ispiše sve slučajeve nakon faktorizacije, primjerice ako ispiše samo faktorizaciju na pozitivne faktore, dobiva najviše 5 bodova.

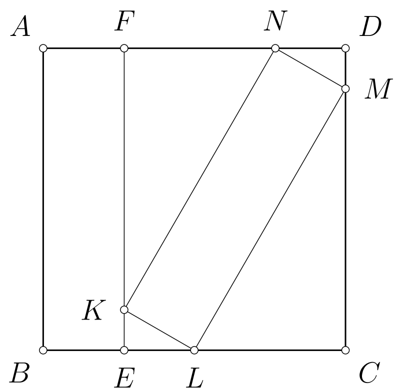
Zadatak A-1.6.

Borna želi svaki od brojeva $2, 3, \ldots, 32$ obojiti jednom od k boja ($k \in \mathbb{N}$) tako da nijedan broj ne bude višekratnik nekog drugog broja iste boje. Odredi najmanji prirodni broj k za koji Borna može to postići.

Bodovanje: Postavljanje i dokazivanje ograde $k \geqslant 5$ nosi ukupno 5 bodova. Pronalaženje primjera bojenja za $k = 5$ nosi 5 bodova. Točan odgovor $k = 5$ bez dokaza i primjera nosi 1 bod.

Zadatak A-1.7.

Na slici je kvadrat $ABCD$ stranice duljine 1. Ako su $ABEF$ i $KLMN$ sukladni pravokutnici, odredi duljinu $|BE|$.



Bodovanje: Korištenje sukladnosti trokuta KEL i MDN nosi 1 bod. Dokaz da je L polovište stranice $\overline{BC}$ nosi 5 bodova, od kojih 1 bod nosi uvođenje točke N', a 3 boda dokaz da je $|LN'| = |BE|$. Korištenje da su trokuti CML i DNM polovice jednakostraničnih trokuta nosi svako 2 boda (jedan bod za uočavanje, a drugi za točan račun).

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

2. razred – srednja škola – A varijanta

28. siječnja 2019.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $z^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$.

Bodovanje: Uvrštavanje $z = x + yi$ u početnu jednadžbu ne donosi bodove ako jednadžba nije sređena. Rješenje bez argumentacije nosi 1 bod. Argumentirani zaključak da z mora biti ili realan, ili strogo imaginaran, nosi 4 boda. Ako u konačnom rješenju nije isključeno $z = 0$, oduzima se 1 bod.

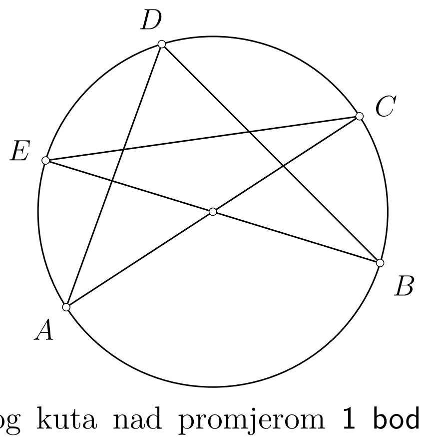
Zadatak A-2.2.

Odredi sve parove (p, q) prostih brojeva za koje kvadratna jednadžba $x^2 + px + q = 0$ ima dva različita rješenja u skupu cijelih brojeva.

Bodovanje: Vièteove formule nose 2 boda, određivanje mogućih slučajeva 1 bod, svaki slučaj po 1 bod i provjera da kvadratna jednadžba zaista ima cjelobrojna rješenja 1 bod.

Zadatak A-2.3.

Na kružnici je dano pet točaka kao na slici. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BE}$ sijeku se u središtu kružnice. Ako je $\sphericalangle DAC = 37°$ i $\sphericalangle EBD = 28°$, odredi kut $\sphericalangle ACE$.



Bodovanje: Uočavanje obodnih kutova nosi 2 boda, a pravog kuta nad promjerom 1 bod. Računanje traženog kuta koristeći zbroj kutova u trokutu nosi 3 boda.

Zadatak A-2.4.

Nađi sve parove (x, y) realnih brojeva za koje vrijedi

$$xy^3 = -135, \qquad (x + y)y = -6.$$

Bodovanje: Uvođenje supstitucije nosi 2 boda. Izvođenje kvadratne jednadžbe za a i b nosi 1 bod i njezino rješavanje 1 bod. Odbacivanje slučaja $y^2 = -15$ nosi 1 bod i navođenje rješenja nosi 1 bod. Zapis rješenja bez postupka nosi 1 bod.

Zadatak A-2.5.

Koliko ima različitih narukvica koje se sastoje od četiri crne i četiri bijele kuglice poredane ukrug? Dvije narukvice smatramo različitima ako se ne mogu okrenuti tako da poredci kuglica na njima budu isti.

Bodovanje: Crtanje ili opisivanje narukvica bez obrazloženja ili sustavnog pristupa nosi najviše 3 boda, i to na sljedeći način: barem pet različitih narukvica 1 bod, šest ili sedam narukvica 2 boda, a svih osam narukvica 3 boda. Dodatno, ako učenik navede kao različite narukvice koje smatramo istima, treba mu u ovom dijelu bodovanja oduzeti 1 bod za jedan takav par narukvica, a 2 boda za dva ili više takvih parova.

Kompletno rješenje mora sadržavati i obrazloženje zašto ne postoje druge mogućnosti. U obrazloženju je važno da učenik pokaže sustavnost u analizi svih mogućnosti (npr. da niže slučajeve po duljini najduljeg niza crnih kuglica, tj. prema rastavima broja 4 na pribrojnike: 4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$).

Zadatak A-2.6.

U kupaonici dimenzija $6\,\mathrm{m} \times 6\,\mathrm{m}$ jedan kut zauzima pravokutna kada dimenzija $2\,\mathrm{m} \times 1.5\,\mathrm{m}$. Koliki je polumjer najvećeg kružnog tepiha koji se može raširiti na podu kupaonice?

Bodovanje: 1 bod nosi zaključak da se središte tepiha najvećeg mogućeg polumjera nalazi na dijagonali (dovoljno je da se to vidi iz načina na koji učenik modelira situaciju), a 1 bod obrazloženje za taj zaključak. 2 boda nosi izražavanje duljina dužina koje smo označili $\overline{FN}$ i $\overline{SN}$, te ukupno 3 boda primjena Pitagorinog poučka. Konačno, rješavanje kvadratne jednadžbe nosi 2 boda, a odbacivanje jednog rješenja 1 bod.

Zadatak A-2.7.

Između gradova prometuju jednosmjerne avionske linije. Za svaka dva grada A i B postoji točno jedna linija: ili iz A prema B, ili iz B prema A. Dokaži da postoji grad iz kojeg je moguće doći do bilo kojeg drugog grada s najviše jednim presjedanjem.

Bodovanje: Iako princip matematičke indukcije nije gradivo drugog razreda, učenici bi mogli imati argumente koje smo koristili u koraku indukcije. Za promatranje proizvoljna dva grada A i C uz pretpostavku da se iz A ne može doći u C s najviše jednim presjedanjem, možemo zaključiti da postoji linija iz C u A i iz C u sve gradove u koje postoji linija iz A (kao na slici u prvom rješenju). Taj zaključak nosi 3 boda.

U prvom rješenju promatranje grada iz kojeg polazi najveći broj linija nosi 3 boda, a dokaz da taj grad zadovoljava uvjet iz zadatka 7 bodova.

U drugom rješenju ideja dokazivanja matematičkom indukcijom nosi 1 bod, baza indukcije nosi 1 bod, primjena pretpostavke indukcije 2 boda, te dovršavanje koraka indukcije 6 bodova.

Učenik koji ne koristi niti princip ekstrema (npr. promatra grad iz kojeg polazi najveći broj linija) niti indukciju, može dobiti 3 boda ako provede analizu kao u napomeni nakon drugog rješenja.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. siječnja 2019.

Zadatak A-3.1.

Izračunaj

$$\frac{\operatorname{tg} 192^\circ + \operatorname{tg} 48^\circ}{1 + \operatorname{tg} 168^\circ \cdot \operatorname{tg} 408^\circ}.$$

Bodovanje: Svođenje svih kutova u zadatku na kutove između 0° i 90° nosi 3 boda. Primjena adicijske formule za tangens nosi 2 boda, a konačan rezultat 1 bod.

Zadatak A-3.2.

Baza pravilne uspravne četverostrane piramide je kvadrat stranice duljine 12, a duljina visine je 8. Koliko je oplošje te piramide?

Bodovanje: 3 boda nosi uočavanje pravokutnog trokuta i primjena Pitagorinog poučka, 1 bod nosi računanje visine piramide, a 2 boda računanje oplošja.

Zadatak A-3.3.

Odredi posljednjih 2019 znamenaka broja $2^{2019} \cdot 5^{2018} \cdot 9^{2017}$.

Bodovanje: Uočavanje da je posljednjih 2018 znamenki nula nosi 2 boda, a određivanje 2019. znamenke 4 boda, od kojih određivanje zadnje znamenke broja 9^{2017} nosi 3 boda.

Zadatak A-3.4.

Neka je a pozitivni realni broj za koji vrijedi $\log_{4a} 40\sqrt{3} = \log_{3a} 45$. Dokaži da je a^3 cijeli broj i odredi ga.

Bodovanje: Uvođenje eksponenta x nosi 1 bod, ideja da dijeljenjem možemo eliminirati a 1 bod, a uočavanje baze $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 2 boda. Logaritmiranje onda nosi 1 bod i konačni rezultat 1 bod. Za drugačiji pristup vidjeti napomenu u rješenjima.

Zadatak A-3.5.

Umnožak određenog broja međusobno različitih prirodnih brojeva manjih od 1000 nije djeljiv brojem 250. Koliko je najviše brojeva pomnoženo?

Bodovanje: 1 bod nosi rastav na proste faktore broja 250, objašnjenje što brojevi moraju zadovoljavati da umnožak ne bude djeljiv s 250 nosi 2 boda, a prebrojavanje brojeva u slučajavima nosi 3 boda. Točan odgovor bez obrazloženja nosi 1 bod.

Ako učenik ne komentira slučaj u kojem možemo uzeti samo neparne brojeve, treba dobiti najviše 5 bodova, tj. za taj slučaj gubi 1 bod. Ako učenik pogriješi u računu i dobije pogrešan rezultat, treba dobiti najviše 5 bodova.

Zadatak A-3.6.

U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BCA$. Simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D tako da je $|AB| = |CD|$. Odredi $\sphericalangle CAB$.

Bodovanje: Uvođenje oznaka i određivanje kutova potrebnih za primjenu poučka o sinusima nosi 1 bod. Primjena tog poučka na svaki od trokuta ADC i ABD nosi po 1 bod. Ako učenik ne uvede pogodne oznake koje mu omogućavaju daljnje povezivanje kutova trokuta u jednu trigonometrijsku jednadžbu, već samo primijenjuje poučak o sinusima na razne trokute treba dobiti 1 bod od spomenuta početna tri boda.

Izvođenje jednadžbe za α i γ nosi 1 bod, primjena formule za sinus dvostrukog kuta 1 bod, te primjena adicijske formule 2 boda. Prelazak na tangense nosi 1 bod i zaključak da je $2\gamma = \alpha$ 1 bod. Konačni rezultat nosi 1 bod.

U planimetrijskom rješenju primjena poučka o simetrali kuta i izvođenje jednakosti $c^2 = ab - bc$ nosi 1 bod. Izvođenje jednakosti $b^2 = ac + c^2$ nosi 5 bodova. Zaključak da je $a = b$ na temelju tih jednakosti nosi 2 boda i računanje kutova 1 bod.

Zadatak A-3.7.

Marko stavlja novčiće na neka polja 3×3 ploče, a zatim zapisuje koliko je novčića u svakom pojedinom retku i stupcu. Koliko najmanje novčića Marko mora staviti na ploču ako želi da tih šest brojeva bude međusobno različito?

Bodovanje: Tvrdnja da je potrebno barem 8 novčića nosi 1 bod. Dokaz te tvrdnje nosi 6 bodova (1 bod za promatranje zbroja Z, 3 boda za uočavanje da Z mora biti barem 15, te 2 boda za uočavanje da je Z paran broj). Primjer koji pokazuje da je 8 novčića dovoljno nosi 3 boda.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

4. razred – srednja škola – A varijanta

28. siječnja 2019.

Zadatak A-4.1.

Umnožak drugog i četvrtog člana aritmetičkog niza s razlikom d iznosi $-d^2$. Odredi umnožak trećeg i petog člana tog niza.

Bodovanje: 1 bod nosi uvođenje zapisa i korištenje da se radi o aritmetičkom nizu, izvođenje zaključka da je $a_3 = 0$ ili $a_1 = -2d$ nosi 4 boda, a konačni rezultat 1 bod.

Zadatak A-4.2.

Odredi sve prirodne brojeve n takve da se neka tri uzastopna koeficijenta u razvoju $(1+x)^n$ odnose kao $3 : 4 : 5$.

Bodovanje: Uvođenje binomnih koeficijenata vrijedi 1 bod, korištenje definicije binomnih koeficijenata 1 bod, nalaženje dvije jednadžbe za n i k svaka po 1 bod, te rješavanje sustava 2 boda. Ako učenik dobije jednu, ali ne i drugu jednadžbu za n i k, dobiva 3 boda za taj dio rješenja.

Zadatak A-4.3.

Dokaži da je za svaki prirodni broj n, broj

$$\underbrace{\overline{2\ldots2}}_{n \text{ znamenaka}} - 3^n + 1$$

djeljiv brojem 7.

Bodovanje: U rješenju indukcijom 1 bod nosi provjera baze indukcije, a 5 bodova nosi provođenje koraka. Od toga, 1 bod je za dovođenje broja s $n+1$ dvojki u vezu s brojem od n dvojki, 2 boda za grupiranje izraza na koji se može primijeniti pretpostavka indukcije, 1 bod za sređivanje ostatka izraza te 1 bod za zaključak.

U direktnom rješenju 1 bod nosi korištenje dekadskog zapisa. Zadnja dva koraka se mogu napraviti obrnutim poretkom, no bez obzira na poredak 3 boda nosi pojednostavljivanje prelaskom na potencije broja 3, a 2 boda primjena formule za zbroj prvih n članova geometrijskog niza.

Zadatak A-4.4.

Odredi broj kompleksnih rješenja jednadžbe

$$z^{2019} = z + \bar{z}.$$

Bodovanje: Korištenje trigonometrijskog zapisa nosi 1 bod, dobivanje mogućnosti za argument φ 1 bod, dobivanje izraza koji povezuje k i $|z|$ 1 bod, uočavanje kako rješenja ovise o parnosti broja k 1 bod, ukupan broj rješenje 1 bod te 1 bod uočavanje da je $z = 0$ također rješenje.

Zadatak A-4.5.

Kolika je vjerojatnost da za dva slučajno odabrana broja x, y iz skupa $[-2, 2]$ vrijedi

$$|x| + |y| \geqslant 1 \qquad \text{i} \qquad ||x| - |y|| \leqslant 1?$$

Bodovanje: 4 boda nosi postavljanje vjerojatnosnog prostora i skiciranje područja u ravnini, a 2 boda računanje površine tog skupa i tražene vjerojatnosti.

Učenik ne mora skicirati skup za svaku od nejednakosti zasebno, dokle god je jasno kako je došao do sveukupne skice.

Zadatak A-4.6.

Dana je točka $A(0, 2)$ na paraboli $y^2 = x + 4$. Odredi sve točke B različite od A na danoj paraboli za koje postoji točka C, također na paraboli, takva da je kut $\sphericalangle ACB$ pravi.

Bodovanje: Učenik nije dužan komentirati slučajeve $c = \pm 2$ i $c = \pm b$, odnosno potencijalne nule u nazivnicima koeficijenata pravaca AC i BC.

4 boda nosi dobivanje veze između koordinata b i c, te 1 bod uočavanje da se radi o kvadratnoj jednadžbi. Postavljanje uvjeta pomoću diskriminante nosi 3 boda, a zapis rješenja 2 boda.

Zadatak A-4.7.

Povlačenjem pravaca paralelnih sa svakom stranicom, jednakostranični trokut stranice duljine n podijeljen je na n^2 jednakostraničnih trokuta stranice duljine 1. Koliko najviše dužina duljine 1 na dobivenoj mreži možemo obojiti u crveno tako da nikoje tri crvene dužine ne tvore jednakostranični trokut?

Bodovanje: Potpuno rješenje se sastoji od dva dijela: dokaza da ne možemo obojiti više od $n(n+1)$ segemenata, te primjera u kojem su obojena točno $n(n+1)$ segmenata i nema jednakostraničnog trokuta sa sve tri crvene stranice. Rješenje koje ima jedan, ali ne i oba dijela treba bodovati sa maksimalno 6 bodova.

Pritom se 2 boda mogu dodijeliti u bilo kojem dijelu za prebrojavanje broja segmenata paralelnih s jednom stranicom. Tu je tvrdnju također moguće dokazati i prebrojavanje ukupnog broja segmenata preko broja trokuta ili dokazati indukcijom. Ako je prebrojavanje netočno treba oduzeti ta dva boda. Točan odgovor bez obrazloženja nosi 2 boda.

Ako učenik prvo dokaže da se ne može obojiti više od $n(n+1)$ segmenata koristeći osjenčane trokute kao u službenom rješenju, za preostala 4 boda dovoljno je da primijeti da u svakom od tih trokuta može odabrati bilo koja dva segmenta i obojiti ih u crveno.