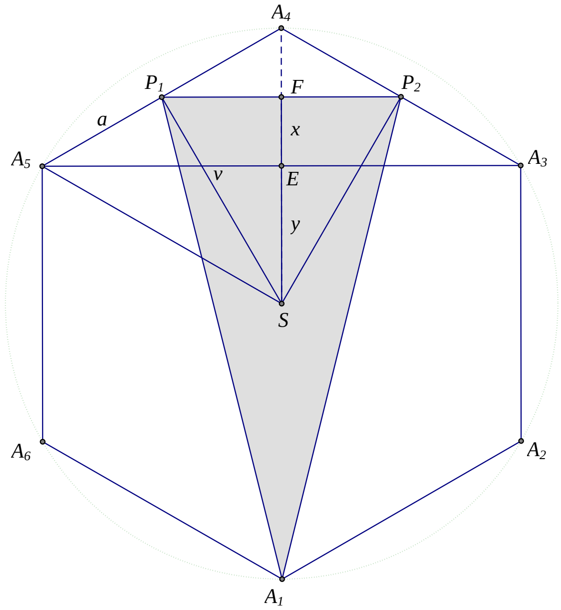
DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 3.travnja-5.travnja 2017.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:



Označimo: $|P_1P_2| = m$, $|FE| = x$, $|ES| = y$, $|A_5A_4| = a$.

Tada je površina šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jednaka $P_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a površina trokuta $\Delta A_1P_2P_1$ je

$$P_3 = \frac{m \cdot (a + x + y)}{2}.$$

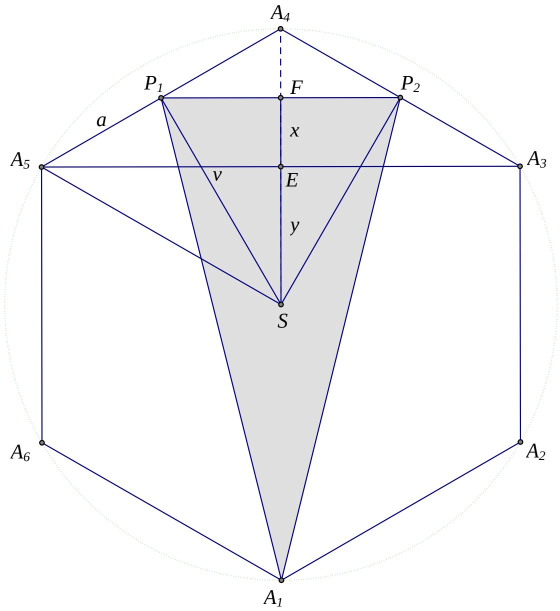
$|P_1P_2| = m = |A_5E| = v$ i $|FE| = x = \frac{1}{4}a$, jer je $\overline{P_1P_2}$ srednjica trokuta $\Delta A_5A_3A_4$.

$|ES| = y = \frac{1}{2}a$, jer je y duljina katete nasuprot kutu od 30° u pravokutnom trokutu ΔA_5ES s hipotenuzom duljine a. Slijedi

$$P_3 = \frac{m \cdot (a + x + y)}{2} = \frac{v \cdot \left(a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a\right)}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{7}{4}a}{2} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$$, pa je traženi omjer jednak:

$$P_3 : P_6 = \left(\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}\right) : \left(6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{7}{16} : \frac{6}{4} = \frac{7}{24}.$$

Drugi način:



Neka je duljina stranica šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jednaka *a*, tj. $|A_1A_2| = a$.

P_1 i P_2 su polovišta stranica trokuta $\Delta A_5A_3A_4$, pa je $\overline{P_1P_2}$ srednjica trokuta $\Delta A_5A_3A_4$.
Neka je točka *E* sjecište dužina $\overline{A_5A_3}$ i $\overline{A_4S}$, a točka *F* sjecište dužina $\overline{P_1P_2}$ i $\overline{A_4S}$.
Tada vrijedi da je:

$$|P_1P_2| = \frac{1}{2}|A_5A_3| = |A_5E| = v = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Uočimo da je trokut ΔP_1SP_2 jednakostraničan trokut sa stranicama duljine $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dužina $\overline{FS}$ je visina tog jednakostraničnog trokuta, pa vrijedi:

$$|FS| = \frac{1}{2}v\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{3a}{4}.$$

Tada je površina šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jednaka $P_6 = 6\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

a površina trokuta $\Delta A_1P_2P_1$ je $P_3 = \dfrac{1}{2}\cdot|P_1P_2|\cdot|FA_1| = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\dfrac{3a}{4}+a\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{7a}{4} = \dfrac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

Iz dobivenih površina slijedi da je traženi omjer jednak:

$$P_3 : P_6 = \left(\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}\right) : \left(6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{7}{16} : \frac{6}{4} = \frac{7}{24}.$$

2. Iz $(x+y)^2 - z^2 = 1,\ \ (y+z)^2 - x^2 = 5,\ \ (z+x)^2 - y^2 = 10$
rastavljanjem na faktore slijedi da je

$(x+y+z)\cdot(x+y-z) = 1,$

$(x+y+z)\cdot(y+z-x) = 5,$

$(x+y+z)\cdot(z+x-y) = 10$

Zbrojimo li sve tri jednadžbe vrijedi da je $(x+y+z)\cdot\left[(x+y-z)+(y+z-x)+(z+x-y)\right] = 16$, odnosno $(x+y+z)^2=16$, iz čega slijedi da $x+y+z=4$ ili $x+y+z=-4$.

1. slučaj:

Ako je $x+y+z=4$ onda je $x+y-z=\frac{1}{4}$, $y+z-x=\frac{5}{4}$, $z+x-y=\frac{10}{4}$.

Dalje redom zbrajajući dvije po dvije jednadžbe dobije se:

$2y=\frac{6}{4}\longrightarrow y=\frac{3}{4}$

$2x=\frac{11}{4}\longrightarrow x=\frac{11}{8}=1\frac{3}{8}$

$2z=\frac{15}{4}\longrightarrow z=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$

2. slučaj:

Ako je $x+y+z=-4$ onda je $x+y-z=-\frac{1}{4}$, $y+z-x=-\frac{5}{4}$, $z+x-y=-\frac{10}{4}$.

Dalje redom zbrajajući dvije po dvije jednadžbe dobije se:

$2y=-\frac{6}{4}\longrightarrow y=-\frac{3}{4}$

$2x=-\frac{11}{4}\longrightarrow x=-\frac{11}{8}=-1\frac{3}{8}$

$2z=-\frac{15}{4}\longrightarrow z=-\frac{15}{8}=-1\frac{7}{8}$

3. Prvi način:

Transformirajmo polaznu jednadžbu:

$m \cdot n - p \cdot m - q \cdot n + p \cdot q = p \cdot q$,

$(m-q) \cdot (n-p) = p \cdot q$.

Iz toga slijedi da $m-q$ i $n-p$ moraju biti istog predznaka. Također, očito je $m \neq q$ i $n \neq p$, jer je $p \cdot q > 0$. Iz polazne jednadžbe slijedi da ne može biti $m < q$ i $n < p$. Naime, kada bi to bio slučaj, onda bi iz polazne jednadžbe slijedilo $m \cdot n = p \cdot m + q \cdot n > m \cdot n + m \cdot n = 2 \cdot m \cdot n$, odnosno $m \cdot n < 0$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da su m i n prirodni brojevi.

Dakle, $m-q$ i $n-p$ moraju biti pozitivni*, te imamo četiri mogućnosti:

$m-q=pq,\quad n-p=1,$ (1)

$m-q=p,\quad n-p=q,$ (2)

$m-q=q,\quad n-p=p,$ (3)

$m-q=1,\quad n-p=pq.$ (4)

Iz (1) dobivamo rješenje $(m, n) = (pq+q,\ p+1)$,

iz (2) dobivamo rješenje $(m, n) = (p+q,\ p+q)$,

iz (3) dobivamo rješenje $(m, n) = (2q,\ 2p)$,

a iz (4) dobivamo rješenje $(m, n) = (q+1,\ pq+p)$.

***Napomena:** Učenica/učenik ne mora odmah uočiti da može eliminirati slučajeve kada su $m-q$ i $n-p$ negativni. U tom će slučaju imati osam umjesto četiri slučaja, ali svi slučajevi kad su $m-q$ i $n-p$ negativni neće rezultirati rješenjem.

Drugi način:

Riješimo jednadžbu po varijabli *m*:

$$m = \frac{qn}{n-p}.$$

Dalje imamo:

$$m = \frac{qn - pq + pq}{n-p} = \frac{q(n-p)}{n-p} + \frac{pq}{n-p} = q + \frac{pq}{n-p}.$$

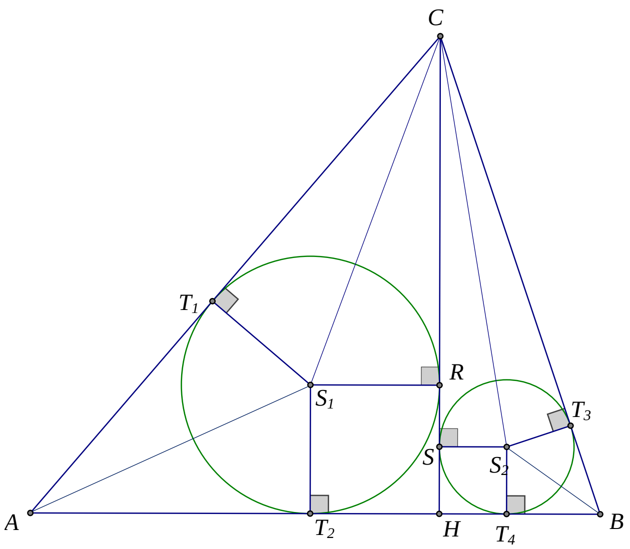
Kao u prethodnom načinu rješavanja, zaključujemo da su $m-q$ i $n-p$ pozitivni**. Zato imamo četiri mogućnosti:

$n - p = 1$, (1)
$n - p = q$, (2)
$n - p = p$, (3)
$n - p = pq$. (4)

Iz (1) dobivamo rješenje $(m, n) = (pq + q,\ p + 1)$,
iz (2) dobivamo rješenje $(m, n) = (p + q,\ p + q)$,
iz (3) dobivamo rješenje $(m, n) = (2q,\ 2p)$,
a iz (4) dobivamo rješenje $(m, n) = (q + 1,\ pq + p)$.

****Napomena:** Kao i u prvom načinu rješavanja, učenica/učenik ne mora odmah uočiti da može eliminirati slučajeve kada su $m-q$ i $n-p$ negativni. U tom će slučaju imati osam umjesto četiri slučaja, ali svi slučajevi kad su $m-q$ i $n-p$ negativni neće rezultirati rješenjem.

4.



Neka je T_1 točka dirališta kružnice upisane trokutu ΔAHC i stranice $\overline{AC}$, a T_2 točka dirališta kružnice upisane trokutu ΔAHC i stranice $\overline{AH}$.

Promotrimo pravokutne trokute ΔAS_1T_1 i ΔAT_2S_1. Oni imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{AS_1}$, sukladne prave kutove $\angle S_1T_1A \cong \angle AT_2S_1$ i jednake duljine stranica $|S_1T_1| = |S_1T_2|$.

Dakle trokuti ΔAS_1T_1 i ΔAT_2S_1 su sukladni po teoremu SSK$^>$, stoga je $|AT_1| = |AT_2|$.

Promotrimo pravokutne trokute ΔCT_1S_1 i ΔCS_1R. Oni imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{CS_1}$, sukladne prave kutove $\angle CT_1S_1 \cong \angle S_1RC$ i jednake duljine stranica $|S_1T_1| = |S_1R|$.

Dakle trokuti ΔCT_1S_1 i ΔCS_1R su sukladni po teoremu SSK$^>$, stoga je $|T_1C| = |RC|$.

Zatim, $|T_2H| = |RH|$ jer su obje duljine duljine polumjera iste kružnice.
Sada imamo
$|AC| = |AT_1| + |T_1C| = |AT_2| + |RC| = |AH| – |T_2H| + |CH| – |RH| = |AH| + |CH| – 2|RH|$.
Odatle slijedi

$$|RH| = \frac{1}{2} \cdot (|AH| + |CH| - |AC|) = \frac{1}{2} \cdot (|AH| + |CH| - 2017). \quad (1)$$

Analogno, pomoću T_3 i T_4, dobivamo

$$|SH| = \frac{1}{2} \cdot (|BH| + |CH| - |BC|) = \frac{1}{2} \cdot (|BH| + |CH| - 2016). \quad (2)$$

Prema Pitagorinom poučku imamo
$2017^2 – |AH|^2 = |CH|^2 = 2016^2 – |BH|^2$,
odakle slijedi
$|AH|^2 – |BH|^2 = 2017^2 – 2016^2$,
odnosno

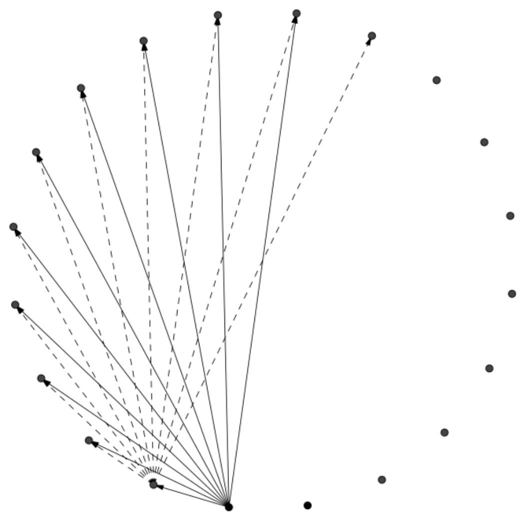
$$|AH| - |BH| = \frac{2017^2 - 2016^2}{|AH| + |BH|} = \frac{(2017-2016)(2017+2016)}{|AB|} = \frac{4033}{2018}. \quad (3)$$

Konačno, iz (1), (2) i (3) slijedi

$$|RS| = |RH| - |SH| = \frac{1}{2} \cdot (|AH| - |BH| - 1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4033}{2018} - 1\right) = \frac{2015}{4036}.$$

5. Ukupno je upućeno $20 \cdot 10 = 200$ poruka, a parova učenika ima $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$.

Zato barem 200 – 190 = 10 poruka mora biti poslano između istih parova učenika pa je najmanji mogući broj obostranih poruka barem 10.
Konstruirajmo sada raspored poslanih poruka tako da je broj obostranih poruka točno 10.
Neka su učenici poredani ukrug i neka je svatko poslao poruku deset učenika koji se nalaze u krugu nakon njega u smjeru kazaljke na satu. Uočimo da će u tom rasporedu slanja poruka samo učenici koji su jedan nasuprot drugoga (dijametralno suprotni) poslati obostrane poruke.



(Svaka točka predstavlja jednog učenika,
a orijentirana dužina jednostranu poruku.)

Time je konstruiran traženi raspored poruka za koje je broj obostranih poruka točno 10.
Iz navedenog možemo zaključiti da je najmanji mogući broj obostranih poruka jednak 10.