DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 3.travnja-5.travnja 2017.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je kralj imao x dukata.

Raspodjela u omjeru 2 : 1 znači da će obitelji pripasti $\frac{2}{3}x$, a državi $\frac{1}{3}x$ dukata.

Obiteljski dio dijeli se između djece i kraljice u omjeru 3 : 1.

Djeca će dobiti $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}x$, a kraljici će ostati $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}x=\frac{1}{6}x$.

Budući da je kralj imao dva sina i dvije kćeri, oni dijele svoj dio u omjeru 4 : 1.

Sinovima će pripasti $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}x=\frac{2}{5}x$, a kćerima $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}x=\frac{1}{10}x$.

Na kraju stariji i mlađi sin dijele svoj dio u omjeru 5 : 1.

Stariji će sin dobiti $\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{5}x=\frac{1}{3}x$, a mlađi $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}x=\frac{1}{15}x$.

Dakle, kraljica je dobila $\frac{1}{6}x$ dukata, a mlađi sin $\frac{1}{15}x$ dukata.

Poznato je da razlika $\frac{1}{6}x-\frac{1}{15}x=\frac{1}{10}x$ iznosi 300 dukata,
pa je onda cijelo nasljedstvo $x = 3000$ dukata.
Starijem sinu pripala je trećina, dakle 1000 dukata.

Drugi način:

Najmanje dukata dobit će mlađa kći. Neka je ona dobila x dukata.
Budući da je mlađa kći dijelila dukate sa starijom sestrom u omjeru 1 : 5, onda je starija kći dobila $5x$ dukata.
Sestre su zajedno dobile $6x$ dukata. Taj iznos su dobile nakon podijele dukata između njih i braće, u omjeru 1 : 4. Dakle, braća su dobila 4 puta više, odnosno $24x$ dukata.
Tih $24x$ dukata braća su podijelila između sebe u omjeru 1 : 5, tako da je mlađi sin dobio $4x$ dukata, a stariji sin $20x$ dukata.
Djeca su, svi zajedno, dobili $x + 5x + 4x + 20x = 30x$ dukata. Taj iznos su dobili nakon raspodijele s majkom, u omjeru 3 : 1. Majka je onda dobila $10x$ dukata.
Usporedbom broja dukata majke i mlađeg sina dobije se jednadžba:
$10x - 4x = 300$,
čije je rješenje $x = 50$.
Stariji je sin dobio $20x = 20 \cdot 50 = 1000$ dukata.

2. Prvi način:

Neka je x ukupan broj upisanih učenika (polaznika) 1. razreda na početku školske godine, a d broj djevojčica među njima.
Tada vrijedi $d = 0.43x$.

Tijekom godine, od ukupnog broja upisanih učenika 1. razreda školu je napustilo 14 djevojčica i 36 dječaka (ukupno 50 učenika) pa su na kraju školske godine 46 % polaznika 1. razreda bile djevojčice.
Vrijedi: $0.46\,(x - 50) = d - 14$, odnosno $0.46\,(x - 50) = 0.43x - 14$.
Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo: $x = 300$.
Ukupan broj upisanih učenika 1. razreda na početku školske godine bio je 300,
od toga $0.43 \cdot 300 = 129$ djevojčica i $300 - 129 = 171$ dječak.
Na kraju školske godine bilo je $171 - 36 = 135$ dječaka.

Drugi način:
Neka je u ukupan broj upisanih učenika 1. razreda na početku školske godine, a m broj dječaka među njima.
Tada vrijedi $m = 0.57u$.
Tijekom godine, od ukupnog broja upisanih učenika 1. razreda školu je napustilo 14 djevojčica i 36 dječaka (ukupno 50 učenika) pa su na kraju školske godine 54 % upisanih učenika 1. razreda bili dječaci.
Vrijedi: $0.54\,(u - 50) = m - 36$, odnosno $0.54\,(u - 50) = 0.57u - 36$.
Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo: $u = 300$.
Ukupan broj upisanih učenika 1. razreda na početku školske godine bio je 300,
od toga $0.57 \cdot 300 = 171$ dječak i $300 - 171 = 129$ djevojčica.
Na kraju školske godine bilo je $171 - 36 = 135$ dječaka.

3. Prvi način:
Traženo vrijeme je 5 sati + x sati, gdje je $x < 1$.
Za to vrijeme mala kazaljka prijeđe $(5 + x) \cdot 30°$, jer za jedan sat prijeđe put koji odgovara kutu veličine 30°.
Velika kazaljka je u 5 sati bila na broju 12, što znači da će za još x sati prijeći put koji odgovara veličini kuta od $x \cdot 360°$.
Kad se kazaljke poklope, veličine kutova obiju kazaljki biti će iste:

$$(5 + x) \cdot 30° = x \cdot 360° \quad / : 30°$$
$$5 + x = 12x$$
$$11x = 5$$
$$x = \frac{5}{11} \text{ sata}$$

Dobiveni x treba zapisati u minutama, sekundama:

$$\frac{5}{11} \cdot 60' = \frac{300'}{11} = 27' + \frac{3'}{11} = 27' + \frac{3}{11} \cdot 60'' = 27' + 16'' + \frac{4''}{11} \approx 27'16''$$

Kazaljke će se poklopiti u približno 5 sati 27 minuta i 16 sekunda.

Drugi način:
U 5 sati mala kazaljka se nalazi na broju 5 (5 sati), a velika na 12 (0 minuta).
Neka je x vrijeme (u minutama) koje još treba proteći do prvog poklapanja kazaljki.
Velika kazaljka za 60 minuta prijeđe put koji odgovara punom kutu (360°), a za jednu minutu 6°.
Mala kazaljka za 60 minuta prijeđe put koji odgovara kutu od $360° : 12 = 30°$,
a za jednu minutu $30° : 60 = 0.5°$.
Za traženih x minuta mala kazaljka prijeđe put koji odgovara kutu od $0.5°x$.
Za isto to vrijeme velika kazaljka će prijeći put koji odgovara kutu od $6°x$, a koji je jednak kutu od 150° (od oznake 12 do oznake 5 na satu) uvećanom za $0.5°x$.

Vrijedi: $6°x - 0.5°x = 150°$

Rješenje jednadžbe je $x = \frac{300}{11} = 27\frac{3}{11}$ (minuta).

Vidi se da je $\frac{3}{11}$ minute $\frac{180}{11}$ sekunda, odnosno $16\frac{4}{11}$ sekunda.

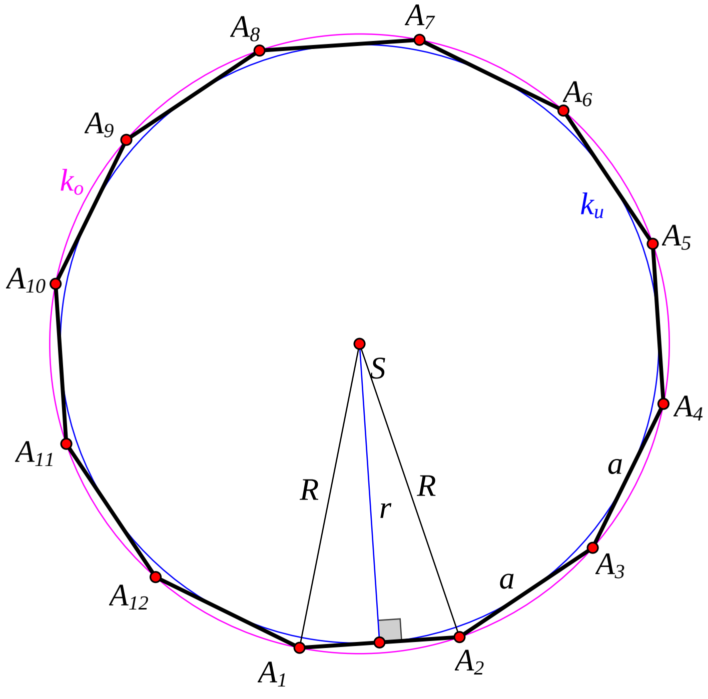
Kazaljke će se poklopiti u približno 5 sati 27 minuta i 16 sekunda.

Treći način:

I velika i mala kazaljka sata kreću se stalnom (jednolikom) brzinom,
što znači da između svaka dva njihova poklapanja protekne jednako vremena.
Budući da se u jednom 12-satnom ciklusu kazaljke poklope 11 puta (svakih sat i „nešto")
taj vremenski razmak moguće je dobiti dijeljenjem vremenskog razdoblja od 12 sati
na 11 jednakih dijelova.
Kada 12 sati podijelimo s 11, dobijemo 1 sat i ostatak 1.
Taj ostatak od jednog sata pretvorimo u 60 minuta i ponovo dijelimo sa 11.
Rezultat je 5 minuta, a ostatak je također 5.
Tih 5 minuta ostatka pretvorimo u 300 sekundi i dijelimo s 11.
Rezultat je 27 sekunda i ostatak 3.
Time smo dobili da se preklapanja velike i male kazaljke događaju svakih 1 sat, 5 minuta,
27 sekundi i 3 jedanaestine sekunde.
Iza 5 sati dogodit će se peto preklapanje kazaljki.
Ono će se dogoditi nakon 5 sati, 25 minuta, 135 sekunda (tj. 2 minute i 15 sekunda)
i 15 jedanaestina sekunde (što je još jedna puna sekunda).
Prvo preklapanje kazaljki sata iz 5 sati događa se približno u 5 sati, 27 minuta i 16 sekunda.

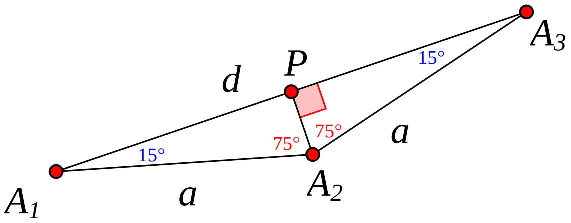
4. Prvi način:

Označimo vrhove pravilnog dvanaesterokuta $A_1, A_2, A_3\ldots, A_{12}$, središte opisane (i upisane) kružnice sa S, duljinu stranice dvanaesterokuta s a, duljinu najkraće dijagonale s d, duljinu polumjera opisane kružnice s R i duljinu polumjera upisane kružnice s r.



Veličina unutarnjeg kuta pravilnog dvanaesterokuta je $\dfrac{(12-2)\cdot 180°}{12}=150°$.

Odaberimo jedan jednakokračan trokut s osnovicom duljine *d* i krakom duljine *a*, primjerice $\Delta A_1A_2A_3$ i s *P* označimo polovište stranice $\overline{A_1A_3}$.

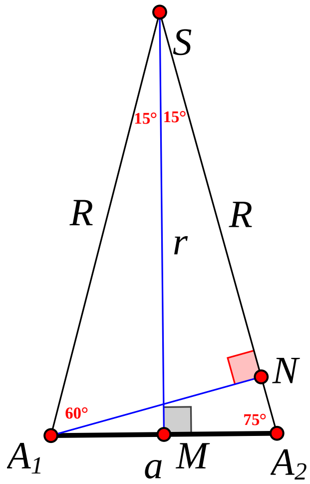


Tada možemo izračunati veličine kutova pravokutnog trokuta ΔA_2A_3P:

$|\angle PA_2A_3|=\dfrac{150°}{2}=75°$

$|\angle A_2A_3P|=90°-75°=15°$.

ΔA_1A_2S je karakteristični trokut pravilnog dvanaesterokuta pa je $|\angle A_2SA_1|=360°:12=30°$.



Neka je *M* nožište visine iz vrha *S* na osnovicu *a*, odnosno *N* nožište visine iz vrha A_1 na krak.

Vrijedi: $|\angle A_2SM|=\dfrac{30°}{2}=15°$

$|\angle MA_2S|=90°-15°=75°$

Uočimo da su ΔPA_2A_3 i ΔMA_2S slični po KK poučku,

Stoga vrijedi razmjer

$r:\dfrac{d}{2}=R:a$, pa je $ar=R\cdot\dfrac{d}{2}$ (1)

ΔA_1NS je polovica jednakostraničnog trokuta pa je $|A_1N|=\dfrac{R}{2}$.

$P_{12}=12\cdot P_{\Delta A_1A_2S}=12\cdot\dfrac{1}{2}\cdot R\cdot|A_1N|=6\cdot R\cdot\dfrac{R}{2}=3R^2$. (2)

S druge strane $P_{12}=12\cdot\dfrac{ar}{2}=6ar$.

Iz ovoga i (1) slijedi

$P_{12} = 6ar = 6 \cdot R \cdot \frac{d}{2} = 3Rd$.   (3)

Iz (2) i (3) je $3R^2 = 3Rd$, odnosno $R = d = 10$ cm.

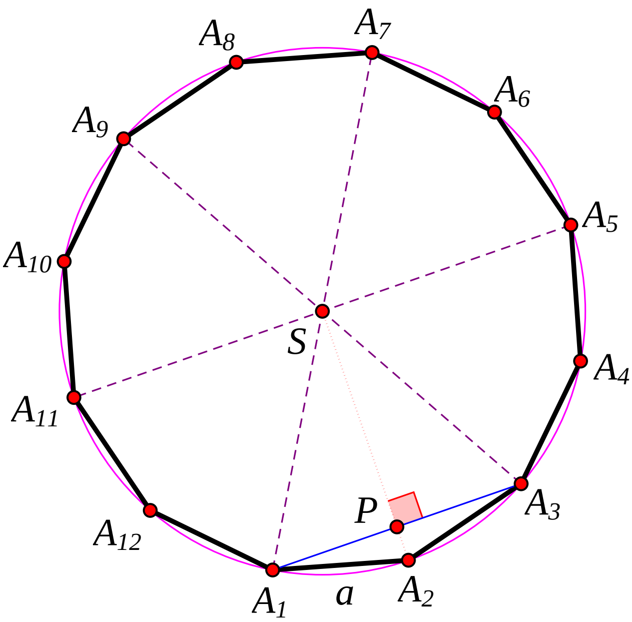
$P_{12} = 3R^2 = 3 \cdot 10^2 = 300$ cm^2

Površina pravilnog dvanaesterokuta je 300 cm^2.

Drugi način:

Neka su A_1, A_2, A_3… A_{11} i A_{12} vrhovi pravilnog dvanaesterokuta, S središte opisane (i upisane) kružnice, a R duljina polumjera opisane kružnice.

Veličina unutarnjeg kuta pravilnog dvanaesterokuta je $\frac{(12-2)\cdot 180°}{12} = 150°$.



Neka je P sjecište dužine $\overline{A_1A_3}$ i dužine $\overline{A_2S}$.

ΔA_1A_2S je karakteristični trokut pravilnog dvanaesterokuta, pa je $|\angle A_2SA_1| = 360° : 12 = 30°$.

Kutovi uz osnovicu karakterističnog trokuta ΔA_1A_2S su sukladni, pa je

$$|\angle SA_1A_2| = |\angle A_1A_2S| = (180° - 30°) : 2 = 75° .$$

$\Delta A_1A_2A_3$ je jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{A_1A_3}$.

Kutovi uz osnovicu trokuta $\Delta A_1A_2A_3$ su sukladni i veličine

$$|\angle A_3A_1A_2| = |\angle A_2A_3A_1| = (180° - 150°) : 2 = 15° .$$

U trokutu ΔA_1A_2P veličine dvaju kutova su 75° i 15°, pa je treći kut veličine 90°, odnosno $|\angle A_2PA_1| = 90°$. Iz toga slijedi da su dužine $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_2S}$ međusobno okomite.

U jednakokračnom trokutu ΔA_1A_3S ($|A_1S| = |A_3S|$) kutovi $\angle SA_1A_3$ i $\angle A_1A_3S$ su jednake veličine jer su to kutovi uz osnovicu i iznose svaki (180° – 60°) : 2 = 60°.

Dakle, ΔA_1A_3S je jednakostraničan sa stranicom duljine 10 cm.

Iz toga slijedi i da je radijus R pravilnom dvanaesterokutu opisane kružnice također 10 cm.

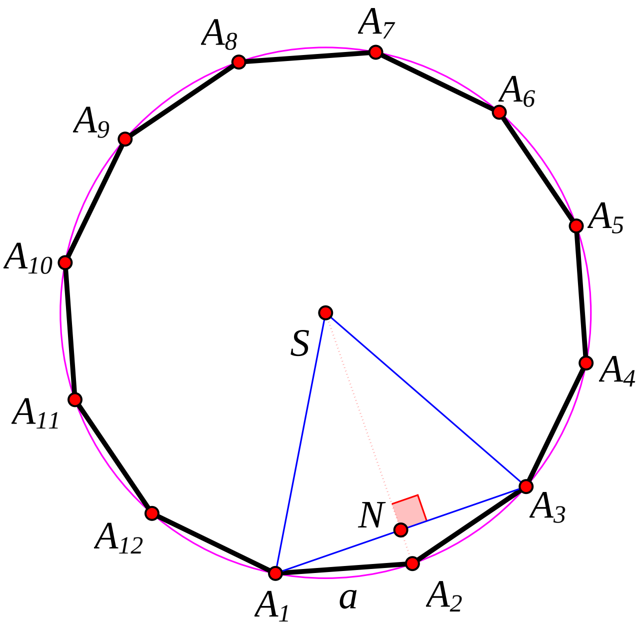
Četverokut $A_1A_2A_3S$ je četverokut s okomitim dijagonalama, pa je njegova površina jednaka polovini umnoška duljina njegovih dijagonala, tj. $P\left(A_1A_2A_3S\right)=\dfrac{\left|A_1A_3\right|\cdot\left|A_2S\right|}{2}$ odnosno

$$P\left(A_1A_2A_3S\right)=\frac{10\cdot 10}{2}=50\text{ cm}^2.$$

U pravilnom dvanaesterokutu ima 6 sukladnih četverokuta površine 50 cm^2, pa je njegova površina 300 cm^2.

Treći način:

Neka su A_1, A_2, A_3… A_{11} i A_{12} vrhovi pravilnog dvanaesterokuta, S središte opisane kružnice, a točka N sjecište dužina $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{SA_2}$.



Dužina $\overline{A_1A_3}$ je jedna od najkraćih dijagonala i vrijedi $\left|A_1A_3\right|=10$ cm.

ΔA_1A_2S je karakteristični trokut pravilnog dvanaesterokuta pa je $|\angle A_2SA_1|=360°:12=30°$.

Tada je $\left|\angle A_3SA_1\right|=60°$.

U jednakokračnom trokutu ΔA_1A_3S ($\left|A_1S\right|=\left|A_3S\right|$) kutovi $\angle SA_1A_3$ i $\angle A_1A_3S$ su jednake veličine jer su to kutovi uz osnovicu i iznose svaki $(180° - 60°) : 2 = 60°$.

Dakle, ΔA_1A_3S je jednakostraničan sa stranicom duljine 10 cm.

Iz toga slijedi da je polumjer opisane kružnice $\left|A_1S\right|=10$ cm.

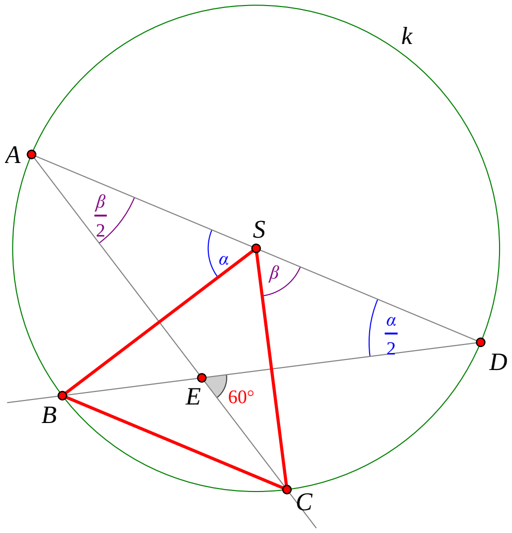
Četverokut $A_1A_2A_3S$ je deltoid ($\left|A_1A_2\right|=\left|A_2A_3\right|$, $\left|A_1S\right|=\left|A_3S\right|$), pa su mu dijagonale okomite i uzdužna dijagonala $\overline{SA_2}$ raspolavlja poprečnu dijagonalu $\overline{A_1A_3}$.

Dakle, točka N je polovište dužine $\overline{A_1A_3}$, pa je $\left|A_1N\right|=\dfrac{1}{2}\left|A_1A_3\right|=5$ cm.

Tada je $P(\Delta A_1A_2S)=\dfrac{1}{2}\cdot\left|SA_2\right|\cdot\left|A_1N\right|=\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 5=25$ cm^2,

a površina dvanaesterokuta je $12 \cdot 25 = 300$ cm^2.

5.



Označimo veličinu središnjeg kuta $\angle ASB$ s α. Onda je veličina njemu pripadnog obodnog kuta $\angle ADB$ jednaka $\frac{\alpha}{2}$. Također, ako veličinu središnjeg kuta $\angle CSD$ označimo s β, onda je veličina njemu pripadnog obodnog kuta $\angle CAD$ jednaka $\frac{\beta}{2}$. Sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ označimo s E i promatramo ΔAED. Veličina vanjskog kuta kod vrha E je 60° i jednaka je zbroju veličina unutarnjih kutova kod vrhova A i D. Iz $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=60°$, slijedi $\alpha + \beta = 120°$.

Promatramo ΔBCS. Tada je $|\angle CSB| = 180° - (\alpha+\beta) = 180° - 120° = 60°$. Kako je $|BS| = |CS|$, vrijedi $|\angle BCS| = |\angle SBC|$. Tada je veličina svakog od tih dvaju kutova jednaka:

$$\frac{180° - |\angle CSB|}{2} = \frac{180° - 60°}{2} = 60°.$$

ΔBCS je jednakostraničan budući da su veličine svih triju kutova jednake 60°.