DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 3.travnja-6.travnja 2017.

6. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je x duljina prvog, y duljina drugog, a z duljina trećeg komada tkanine. Neka je n duljina jednakih dijelova tkanine nakon rezanja, tj.

$$\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}y = \frac{5}{6}z = n$$

$$\frac{3}{4}x = n \Rightarrow x = \frac{4}{3}n,\ \frac{1}{2}y = n \Rightarrow y = 2n,\ \frac{5}{6}z = n \Rightarrow z = \frac{6}{5}n$$

$$x + y + z = \frac{4}{3}n + 2n + \frac{6}{5}n = 34$$

$$20n + 30n + 18n = 510$$

$$68n = 510$$

$$n = 7.5$$

Dalje je $x = \frac{4}{3} \cdot 7.5 = 10$, tj. prvi komad tkanine je prije rezanja bio duljine 10 m, drugi komad je prije rezanja bio duljine $y = 2 \cdot 7.5 = 15$ m, a treći je komad prije rezanja bio duljine $z = \frac{6}{5} \cdot 7.5 = 9$ m.

Drugi način:

Neka je x duljina prvog, y duljina drugog, a z duljina trećeg komada tkanine.

Prema uvjetu zadatka vrijedi jednakost $\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}y = \frac{5}{6}z$.

Iz $\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}y$ slijedi $y = \frac{3}{4}x : \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x \cdot 2 = \frac{3}{2}x$. Iz $\frac{3}{4}x = \frac{5}{6}z$ slijedi $z = \frac{3}{4}x : \frac{5}{6} = \frac{3}{4}x \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{10}x$.

Zbog $x + y + z = 34$ redom slijedi $x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{10}x = 34$, $\frac{17}{5}x = 34$, odakle je $x = 34 : \frac{17}{5} = 10$ m,

$y = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15$ m i $z = \frac{9}{10} \cdot 10 = 9$ m.

Prije rezanja prvi dio bio je dug 10 m, drugi 15 m i treći 9 m.

Treći način:

Neka je x duljina prvog, y duljina drugog, a z duljina trećeg komada tkanine.

Prema uvjetu zadatka vrijedi jednakost $\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}y = \frac{5}{6}z$.

Pomnožimo li dobiveni izraz brojem 12 (jer je V(3, 4, 6) = 12), dobit ćemo da je $9x = 6y = 10z$.

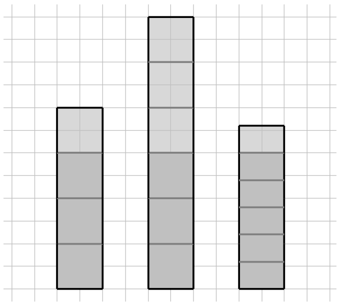
Iz $9x = 10z$ slijedi $x = \frac{10z}{9}$, a iz $6y = 10z$ slijedi $y = \frac{10z}{6}$.

Dalje, zbog $x+y+z=34$ redom slijedi $\frac{10z}{9}+\frac{10z}{6}+z=34$, 20z + 30z + 18z = 612, odakle je

$z=\frac{612}{68}=9$ m. Dalje je $x=\frac{10\cdot 9}{9}=10$ m i $y=\frac{10\cdot 9}{6}=15$ m.

Prije rezanja prvi dio bio je dug 10 m, drugi 15 m i treći 9 m.

Četvrti način:



Ako grafički prikažemo zadane odnose i s x označimo dijelove koji su jednake duljine, uočavamo sljedeće: odrezani dio prvog komada tkanine ima duljinu $\frac{1}{3}x$, odrezani dio drugog komada je duljine x i odrezani dio trećeg komada ima duljinu $\frac{1}{5}x$. Zbrojimo li duljine svih triju komada tkanine prije rezanja, dobivamo jednadžbu $x+\frac{1}{3}x+x+x+x+\frac{1}{5}x=34$, čijim rješavanjem redom dobivamo $\frac{68}{15}x=34$, $x=34:\frac{68}{15}$, tj. x = 7.5.

Dalje kao u 1. načinu rješavanja.

2. Prvi način:

Na jednoj strani ulice kućni su brojevi neparni (1, 3, 5,…), a s druge parni (2, 4, 6, …). Kako se zbrajanjem parnih brojeva uvijek dobiva paran broj, očito je zbroj neparnih kućnih brojeva 1369, a parnih 2162.

Neka je n broj kuća na neparnoj strani. Prvi kućni broj na toj strani je 1, a posljednji je $2n - 1$.

Koristeći Gaussov princip, dobiva se $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = (1 + 2n - 1) \cdot n : 2 = 1369$, odnosno $n \cdot n = 1369$. Traženi broj mora biti između 30 i 40 jer je $30 \cdot 30 = 900$, a $40 \cdot 40 = 1600$. Budući da je zadnja znamenka tog umnoška jednaka 9, znamenka jedinica broja n mora biti ili 3 ili 7.

Provjerom se dobiva da je $n = 37$ (jer je $33 \cdot 33 = 1089$).

Neka je m broj kuća na parnoj strani. Prvi kućni broj na toj strani je 2, a posljednji je $2m$. Koristeći Gaussov princip, dobiva se da je $2 + 4 + 6 + \ldots + 2m = (2 + 2m) \cdot m : 2 = 2162$, odnosno $(m + 1) \cdot m = 2162$. Rastavljanjem broja 2162 na umnožak prostih faktora dobiva se da je $2162 = 2 \cdot 23 \cdot 47 = 47 \cdot 46$. Odatle se zaključuje da je $m = 46$.

Na jednoj je strani ulice 37, a na drugoj 46 kuća. U ulici su 83 kuće.

Drugi način:

Na jednoj strani ulice kućni su brojevi neparni (1, 3, 5,…), a s druge parni (2, 4, 6, …). Kako se zbrajanjem parnih brojeva uvijek dobiva paran broj, očito je zbroj neparnih kućnih brojeva 1369, a parnih 2162.

Neka je x najveći kućni broj na neparnoj strani ulice. Tada je zbroj svih kućnih brojeva na toj strani ulice jednak $1 + 3 + \ldots + x$. Koristeći Gaussov princip nalazimo da je taj zbroj jednak

$\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)\cdot(x+1)}{2}=1369$, tj. $(x + 1)(x + 1) : 4 = 1369$ ili $(x + 1)(x + 1) = 5476$. Traženi faktor mora biti između 70 i 80 jer je $70 \cdot 70 = 4900$, a $80 \cdot 80 = 6400$. Budući da je zadnja znamenka tog umnoška jednaka 6, znamenka jedinica broja $x + 1$ mora biti ili 4 ili 6. Provjerom se dobiva da je $x + 1 = 74$, odnosno $x = 73$ (jer je $76 \cdot 76 = 5776$). Dakle, na neparnoj strani ulice najveći kućni broj je $x = 73$.

Budući da je $x = 2k – 1$, pri čemu je k prirodan broj koji označava broj kuća na neparnoj strani ulice, zaključujemo da je na neparnoj strani ulice $(73 + 1) : 2 = 37$ kuća.

Neka je y najveći kućni broj na parnoj strani ulice. Tada je zbroj svih kućnih brojeva na toj strani ulice jednak $2 + 4 + \ldots + y$. Koristeći Gaussov princip nalazimo da je taj zbroj jednak

$\frac{1}{2}\cdot\frac{(y+2)\cdot y}{2}=2162$, tj. $y \cdot (y + 2) : 4 = 2162$ ili $y \cdot (y + 2) = 8648$. Rastavljanjem broja 8648 na umnožak prostih faktora dobiva se da je $8648 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 47 = (2 \cdot 2 \cdot 23) \cdot (2 \cdot 47) = 92 \cdot 94$.

Odatle se zaključuje da je $y = 92$, tj. da je na parnoj strani ulice najveći kućni broj 92.

Budući da je $y = 2l$, pri čemu je l prirodan broj koji označava broj kuća na parnoj strani ulice, zaključujemo da je na neparnoj strani ulice $92 : 2 = 46$ kuća.

U ulici su $37 + 46 = 83$ kuće.

3. Prvi način:

Neka su $\overline{ab}$ i $\overline{cd}$ zadani dvoznamenkasti brojevi. Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$\overline{ab}\cdot\overline{cd}+3816=\overline{ab}\cdot\overline{dc}$, odnosno $(10a + b) \cdot (10c + d) + 3816 = (10a + b) \cdot (10d + c)$.

Dalje je redom:

$100ac + 10ad + 10bc + bd + 3816 = 100ad + 10ac + 10bd + bc,$

$90ac + 9bc + 3816 = 90ad + 9bd$

$10ac + bc + 424 = 10ad + bd$

$c(10a + b) + 424 = d(10a + b)$

$c\cdot\overline{ab}+424=\overline{ab}\cdot d$

$\overline{ab}(d-c)=424$

Dalje se može rješavati na dva načina:

a) c i d su znamenke pa je njihova razlika sigurno manja od 9 (ne može biti 9 jer bi c bilo jednako 0, što ne može biti) i različita od nule (zbog umnoška koji ima vrijednost 424).

I.	$d – c = 1 \rightarrow \overline{ab} = 424$, ne može biti jer je $\overline{ab}$ dvoznamenkasti broj
II.	$d – c = 2 \rightarrow \overline{ab} = 212$, ne može biti jer je $\overline{ab}$ dvoznamenkasti broj
III.	$d – c = 3 \rightarrow$ ne može biti jer 424 nije djeljiv brojem 3
IV.	$d – c = 4 \rightarrow \overline{ab} = 106$, ne može biti jer je $\overline{ab}$ dvoznamenkasti broj
V.	$d – c = 5 \rightarrow$ ne može biti jer 424 nije djeljiv brojem 5
VI.	$d – c = 6 \rightarrow$ ne može biti jer 424 nije djeljiv brojem 6
VII.	$d – c = 7 \rightarrow$ ne može biti jer 424 nije djeljiv brojem 7
VIII.	$d – c = 8 \rightarrow \overline{ab} = 53$

Iz $\overline{ab} = 53$ i $d = 8 + c$ slijedi c = 1 i $d = 9$, tj. $\overline{cd} = 19$. Točan umnožak je $53 \cdot 19 = 1007$.

b) Rastavom broja 424 na proste faktore dobit ćemo: $424 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 53$. Odatle je dvoznamenkasti broj $\overline{ab} = 53$, razlika znamenaka iznosi $d – c = 8$, dakle $c = 1$, $d = 9$, tj. $\overline{cd} = 19$.
Točan umnožak je $53 \cdot 19 = 1007$.

Drugi način:

Neka su $\overline{ab}$ i $\overline{cd}$ zadani dvoznamenkasti brojevi. Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$\overline{ab} \cdot \overline{cd} + 3816 = \overline{ab} \cdot \overline{dc}$, odnosno $\overline{ab}\,(\overline{dc} - \overline{cd}) = 3816$. Dalje je redom:

$$\overline{ab}\,(10d + c - 10c - d) = 3816$$

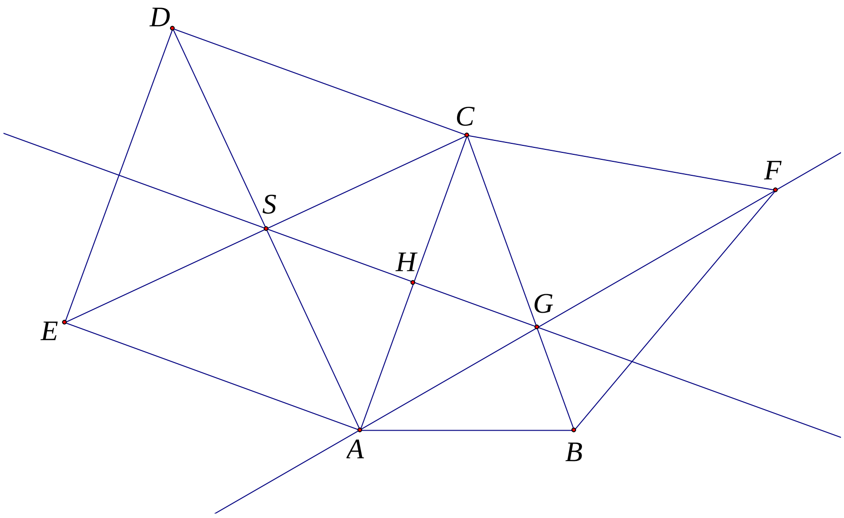
$$\overline{ab}\,(9d - 9c) = 3816$$

$$9 \cdot \overline{ab}\,(d - c) = 3816 \qquad /:9$$

$$\overline{ab}\,(d - c) = 424$$

Dalje kao u 1. načinu rješavanja.

4.



Prema uvjetu zadatka je $|\angle SAG| = |\angle DAF| = 85°$. Dijagonale kvadrata se raspolavljaju, jednake su duljine i međusobno su okomite pa vrijedi: $|SA| = |SC|$ i $|\angle SAC| = |\angle SCA| = 45°$. Dalje je $|\angle CAG| = |\angle SAG| - |\angle SAC| = 85° - 45° = 40°$. Zbog $|CA| = |CB| = |CF|$ zaključujemo da je trokut ΔAFC jednakokračan s osnovicom $\overline{AF}$ i tada vrijedi $|\angle CAF| = |\angle AFC| = 40°$. Tada je $|\angle ACF| = 180° - 2 \cdot |\angle CAF| = 180° - 2 \cdot 40° = 180° - 80° = 100°$. Trokut ΔBFC je jednakostraničan pa je $|\angle GCF| = |\angle BCF| = 60°$ i $|\angle ACG| = |\angle ACF| - |\angle GCF| = 100° - 60° = 40°$. U trokutu ΔAGC vrijedi da je $|\angle CAG| = |\angle ACG| = 40°$, pa je $|GA| = |GC|$.

Dalje je moguće na tri načina:

Prvi način:

Dijagonale kvadrata se raspolavljaju i jednake su duljine, tj. vrijedi $|SA| = |SC|$. Dokazali smo da je $|GA| = |GC|$. Za točke S i G vrijedi da su jednako udaljene od krajnjih točaka dužine $\overline{AC}$, pa pripadaju simetrali dužine $\overline{AC}$. Kako je simetrala dužine okomita na dužinu, slijedi da je $SG \perp \overline{AC}$, tj. $|\angle AHS| = 90°$.

Drugi način:
Promatramo trokute ΔSGC i ΔSAG. Dijagonale kvadrata se raspolavljaju i jednake su duljine, tj. vrijedi $|SA|=|SC|$. Dokazali smo da je $|GA|=|GC|$. Budući da je stranica $\overline{SG}$ je zajednička za trokute ΔSGC i ΔSAG, prema poučku SSS slijedi da je $\Delta SGC \cong \Delta SAG$ pa vrijedi $|\angle GSA|=|\angle CSG|=90°:2=45°$. U trokutu ΔAHS vrijedi da je $|\angle HSA|=|\angle GSA|=45°$ i $|\angle SAH|=|\angle SAC|=45°$, pa je $|\angle AHS|=180°-(|\angle HSA|+|\angle SAH|)=180°-90°=90°$.

Treći način:
Promatramo trokute ΔSGC i ΔSAG. Dijagonale kvadrata se raspolavljaju i jednake su duljine, tj. $|SA|=|SC|$. Dokazali smo da je $|GA|=|GC|$. Budući da je $|\angle SCH|=|\angle SCA|=45°$ i $|\angle HCG|=|\angle ACG|=40°$ vrijedi $|\angle SCG|=85°$, odnosno $|\angle SAG|=|\angle DAF|=85°$.
Prema poučku SKS slijedi da je $\Delta SGC \cong \Delta SAG$ pa vrijedi $|\angle AGS|=|\angle SGC|$. U trokutu ΔAGC vrijedi da je $|\angle CAG|=|\angle ACG|=40°$, pa je $|\angle AGC|=100°$, te $|\angle AGS|=|\angle SGC|=100°:2=50°$. U trokutu ΔHGC vrijedi $|\angle HGC|=50°$ i $|\angle HCG|=40°$, pa je $|\angle CHG|=90°$ i vrijedi da je $SG \perp \overline{AC}$, tj. $|\angle AHS|=90°$.

5. Kako najduljoj visini pripada najkraća stranica, očito je b = 5 cm. Budući da je $v_a=\frac{2P}{a}$, $v_b=\frac{2P}{b}$ i $v_c=\frac{2P}{c}$, iz $v_b=v_a+v_c$ redom slijedi: $\frac{2P}{b}=\frac{2P}{a}+\frac{2P}{c}$, $\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$, $\frac{1}{5}=\frac{a+c}{ac}$, $ac=5a+5c$, $ac-5c=5a$, $c(a-5)=5a$, te je $c=\frac{5a}{a-5}$.
Dalje je $c=\frac{5a-25+25}{a-5}=\frac{5a-25}{a-5}+\frac{25}{a-5}=\frac{5(a-5)}{a-5}+\frac{25}{a-5}=5+\frac{25}{a-5}$.
Broj c će biti cijeli broj ako je a – 5 djelitelj broja 25, tj. ako je a – 5 jednak 1, 5 ili 25, odnosno –1, –5 ili –25.

$a-5=1 \Rightarrow a$ = 6 cm $\Rightarrow c$ = 30 cm što je nemoguće zbog nejednakosti trokuta
$a-5=5 \Rightarrow a$ = 10 cm $\Rightarrow c$ = 10 cm
$a-5=25 \Rightarrow a$ = 30 cm $\Rightarrow c$ = 6 cm što je nemoguće zbog nejednakosti trokuta
$a-5=-1 \Rightarrow a$ = 4 cm što je nemoguće jer je najkraća stranica duljine 5 cm
(ili: $a-5=-1 \Rightarrow a$ = 4 cm $\Rightarrow c$ = –20 što je nemoguće)
$a-5=-5 \Rightarrow a$ = 0 što je nemoguće
$a-5=-25 \Rightarrow a=-20$ što je nemoguće

Dakle, postoji samo jedan takav trokut sa stranicama duljina a = 10 cm, b = 5 cm i c = 10 cm.