RMM 2017 simulacija - Day 1

sastavili: Marko Jukić, Petar Orlić, Daniel Paleka i Leon Starešinić

1. Neka je $p = 4k + 3$ prost broj. Odredi
$$\frac{1}{0^2+1} + \frac{1}{1^2+1} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^2+1} \pmod{p}.$$

2. Neka je n prirodan broj. Na stolu je više od n^2 kamenčića. Tadej i Petar igraju igru. Svaki potez, igrač mora uzeti jedan kamenčić, ili prost broj manji od n kamenčića, ili broj kamenčića djeljiv s n. Gubi onaj igrač koji ne može odigrati potez. Ako Petar počinje, tko ima pobjedničku strategiju?

3. Zadan je trokut ABC u kojem je $\angle BAC \neq 60°$. Neka su I_B i I_C središta pripisanih kružnica nasuprot vrhova B i C, te neka su B' i C' refleksije točaka B i C preko stranica AC i AB redom. Pravci I_CB' i I_BC' sijeku se u P. Neka su P_A, P_B i P_C refleksije točke P preko stranica BC, CA i AB.

   Dokaži da se pravci AP_A, BP_B i CP_C sijeku u jednoj točki.

RMM 2017 simulacija - Day 2

sastavili: Marko Jukić, Petar Orlić, Daniel Paleka i Leon Starešinić

1. Svaki od $n \geq 3$ vrhova grafa G možemo obojati u jednu od tri boje tako da nijedna dva vrha iste boje nisu spojena bridom. Ako je to bojanje jedinstveno do na permutaciju boja, dokaži da G ima najmanje $2n - 3$ bridova.

2. Neka je $N > 1$ prirodan broj i neka su $a_1, \ldots, a_N$ nenegativni realni brojevi sume najviše 500.

   Dokaži da postoje prirodni brojevi k i $1 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k = N$ takvi da vrijedi
   $$\sum_{i=1}^{k} n_i a_{n_{i-1}} < 2005.$$
   .

3. Borna želi nagraditi jednu od 100 djevojaka. To će učiniti tako što će baciti *biased* novčić k puta, nakon što odredi koja djevojka pobjeđuje u svakom od mogućih ishoda niza bacanja novčića. (Biased novčić pada na glavu s vjerojatnošću p, a na pismo s vjerojatnošću $1 - p$.)

   Dokaži da postoji odabir vjerojatnosti p i prirodnog broja k takav da Borna može odrediti kojoj djevojci svaki od 2^k ishoda nosi pobjedu na način da svaka djevojka ima jednaku vjerojatnost pobjede.

RMM 2017 simulacija - Day 3

sastavili: Marko Jukić, Petar Orlić, Daniel Paleka i Leon Starešinić

1. U trokutu ABC je BC najveća stranica. Na opisanoj kružnici trokuta ABC, D je polovište luka $\widehat{AC}$ na kojem je B, a E je polovište luka $\widehat{AB}$ na kojem je C. Kružnica k_1 prolazi kroz A i B i dira pravac AC u A. Kružnica k_2 prolazi kroz A, E i dira pravac AD u A. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u A i P. Dokaži da je AP simetrala kuta $\angle BAC$.

2. Neka je $\mathbb{Q}$ skup racionalnih brojeva. Zadane su strogo rastuće funkcije $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ koje obje postižu svaku racionalnu vrijednost. Mora li $f + g$ postizati svaku racionalnu vrijednost?

3. Na beskonačnoj kvadratnoj ploči, trokut s vrhovima u vrhovima kvadratića ima najmanju površinu od svih takvih trokuta sličnih njemu. Dokaži da središte opisane kružnice tog trokuta nije vrh kvadratića.

RMM 2017 simulacija - Day 4

sastavili: Marko Jukić, Petar Orlić, Daniel Paleka i Leon Starešinić

1. Neka je $p > 2$ prost broj i neka je je L skup točaka u koordinatnoj ravnini s koordinatama iz skupa $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Dokaži da možemo odabrati p točaka iz L takvih da nijedne 3 odabrane točke nisu kolinearne.

2. Neka su $a_1, \dots, a_n$ prirodni brojevi koji zadovoljavaju nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{2}.$$

Svake godine, kralj neke države objavljuje godišnji izvještaj s n ekonomskih indikatora, takav da je i-ti indikator prirodan broj manji ili jednak a_i. Godišnji izvještaj je *optimističan* ako barem $n-1$ indikatora ima veće vrijednosti nego prethodne godine. Dokaži da kralj može objaviti beskonačno mnogo uzastopnih optimističnih godišnjih izvještaja.

3. Neka je $A_1 \dots A_n$ tetivan konveksan mnogokut kojemu je središte opisane kružnice u strogoj unutrašnjosti. Neka su $B_1, \dots, B_n$ točke redom na stranicama $A_1A_2, \dots, A_nA_1$ različite od vrhova mnogokuta. Dokaži

$$\frac{B_1B_2}{A_1A_3} + \frac{B_2B_3}{A_2A_4} + \ldots + \frac{B_nB_1}{A_nA_2} > 1.$$