Adventska radionica 2016 – Kombinatorna geometrija

Azra Tafro

U ovom predavanju upoznat ćemo se s nekim metodama rješavanja kombinatornih zadataka u geometrijskom okruženju.

Metoda ekstrema

Ideja ove metode je pronaći neki ekstremalni element koji se pojavljuje u postavci zadatka. U geometriji, to su obično najkraća/najveća udaljenost, najveća/najmanja površina i slično. Pogledajmo sljedeći primjer:
U ravnini je dano konačno mnogo crnih i bijelih točaka sa svojstvom da svaka dužina koja spaja istobojne točke sadrži točku druge boje. Dokažite da sve točke leže na istom pravcu.
Skiciranjem zadatka odmah uočavamo da je problem u tome što bismo, ako točke nisu sve na istom pravcu, stalno pronalazili nove točke odnosno "docrtavali beskonačno mnogo točaka" što nije u skladu s pretpostavkom zadatka. Da bismo uobličili taj argument, koristimo princip ekstrema. Formalno, pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi, tj. da nisu sve točke na istom pravcu. To znači da među njima postoje neke trojke koje čine vrhove trokuta. Od svih takvih trokuta uočimo onaj *najmanje* površine i označimo njegove vrhove A, B i C. Tada su barem dvije od njih iste boje, recimo da su to A i B. Tada između njih postoji točka D suprotne boje, ali onda trokut ACD ima manju površinu od trokuta ABC čime dolazimo do kontradikcije.

Promotrimo još jedan poznati primjer: *Na koliko dijelova n pravaca u općem položaju*[1] *dijeli ravninu?* Ovaj zadatak moguće je riješiti matematičkom indukcijom, ili rješavanjem rekurzivne jednadžbe. Treći način je metoda ekstrema. Zadani pravci u općem položaju sijeku se u $\binom{n}{2}$ točaka. Svaka od tih točaka ujedno je i najdonja točka nekog dijela ravnine. Uz to, postoji $n+1$ dijelova ravnine koji nisu omeđeni odozdo tj. nemaju najdonju točku pa je konačno rješenje $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$. Sada znamo riješiti i analogni problem - na koliko dijelova n ravnina u općem položaju dijeli (trodimenzionalni) prostor?

Zadaci za vježbu

1. Neka je S skup točaka u ravnini. Svaka od točaka iz S ujedno je i polovište dužine koja spaja neke druge dvije točke iz S. Dokažite da je skup S beskonačan.

2. U ravnini je dano n plavih i n crvenih točaka tako da nikoje tri nisu kolinearne. Pokažite da možemo ucrtati n dužina tako da svaka dužina spaja jednu crvenu i jednu plavu točku (i nikoje dvije nemaju isti vrh), tako da se dužine međusobno ne sijeku.

   (Uputa: Od svih mogućih kombinacija dužina, promatramo onu gdje je ukupna suma duljina minimalna.)

[1] Pravci su u općem položaju ako nikoja dva nisu paralelna i nikoja tri ne prolaze istom točkom.

3. U ravnini je dano n točaka tako da ne leže sve na istom pravcu. Pokažite da postoji pravac koji sadrži točno dvije.

   (Uputa: Promatrajte pravac i točku izvan njega koji su najmanje udaljeni.)

4. U ravnini je dano n točaka tako da svake tri čine vrhove trokuta površine manje od 1. Dokažite da sve točke leže unutar trokuta površine manje od 4.

   (Uputa: Promatrajte tri točke koje čine trokut najveće površine.)

5. $2n + 1$ ljudi stoji u ravnini tako da su sve međusobne udaljenosti različite. Istovremeno svatko upuca svog najbližeg susjeda. Dokažite da

   (a) barem jedna osoba preživi, tj. postoji osoba koju nitko nije upucao.

   (b) svaku osobu je upucalo najviše 5 ljudi.

   (c) putanje metaka se međusobno ne sijeku.

   (d) skup dužina koje čine putanje metaka ne sadrži zatvorenu liniju tj. poligon.

6. U ravnini je dano $n \geq 3$ pravaca tako da nikoja dva nisu paralelna. Kroz svaki presjek dva pravca prolazi berem još jedan pravac. Dokaži da svi pravci prolaze istom točkom.

Konveksna ljuska

Skup S točaka u ravnini ili prostoru je *konveksan* ako je za sve točke A i B iz S dužina $\overline{AB}$ cijela sadržana u S. Primijetimo da iz toga slijedi da je presjek bilo koje kolekcije konveksnih skupova također konveksan.

Za proizvoljni skup točaka T definiramo **konveksnu ljusku** skupa T kao presjek svih konveksnih skupova koji sadrže T, odnosno kao najmanji konveksni skup koji sadrži T. Ako se T sastoji od konačno mnogo točaka, tada je njegova konveksna ljuska poligon čiji vrhovi su neke točke iz T.

Primjer (M. Krnić, *Dirichletovo pravilo*, zad. 4.3.) U ravnini je dano 6 točaka tako da nikoja tri ne pripadaju istom pravcu. Dokaži da postoji trokut čiji su vrhovi neke tri od tih šest točaka i čiji jedan kut nije manji od 120°.

Zadaci za vježbu

1. U ravnini je dano 5 točaka u općem položaju[2].Dokaži da među njima postoje četiri koje su vrhovi konveksnog četverokuta.

2. U ravnini je dano n točaka tako da svake četiri čine vrhove konveksnog četverokuta. Dokaži da tih n točaka čini vrhove konveksnog n-terokuta.

3. (MEMO) U ravnini je dano n točaka u općem položaju. Sve točke obojane su crveno ili zeleno tako da svaki trokut s istobojnim vrhovima sadrži u unutrašnjosti barem jednu točku druge boje. Koja je najveća moguća vrijednost za n?

[2]Točke su u općem položaju ako nikoje tri ne leže na istom pravcu.

4. U ravnini je dano $n \geq 4$ točaka u općem položaju, tako da za svake tri točke postoji četvrta (među danim točkama) koja s njima čini vrhove paralelograma. Dokaži da je $n = 4$.