Sukladnost i dodatne konstrukcije

Matija Bašić

prosinac 2016.

- **Crtanje slike u fazama.** Neka vam skica bude dovoljno velika i pregledna. Ako je u zadatku mnogo kružnica i pravaca, nacrtajte samo jedan dio zadane konfiguracije i izvucite sve zaključke koje možete. Na primjer, nemojte crtati sve tri visine, već samo jednu. Nemojte zaboraviti širu sliku i što je potrebno dokazati.
- **Oznake.** Označite na skici ono što je zadano u zadatku. Ako rješavate zadatak unutrag, označite što želite dokazati, ali nemojte na istoj slici označavati ono što je zadano i ono što želite dokazati kako biste izbjegli logičke pogreške.
- **Korištenje polovišta.** Ako se u zadatku pojavljuje polovište, razmišljajte možete li nacrtati/uočiti srednjicu nekog trokuta, paralelogram kojem je ta točka sjecište dijagonala ili pravokutni trokut kojem je ta točka polovište hipotenuze.
- **Algebarski uvjeti.** Ako se u zadatku pojavljuje neki algebarski uvjet, uvodite novu točku tako da na jednom pravcu imamo dužine čije duljine su jednake onima koje se pojavljuju u izrazu. Na primjer, ako u trokutu ABC točka D leži na stranici $\overline{AB}$ tako da vrijedi $|BC| = |AD| + |AC|$, nacrtat ćemo točku E na produžetku stranice $\overline{AB}$ takvu da je $|AE| = |AC|$.

Zadaci

1. Nad stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ konstruirani su izvana jednakostranični trokuti BPC i DCQ. Dokažite da je trokut APQ jednakostraničan.
2. U tupokutnom trokutu ABC, s tupim kutom u vrhu A, kut γ dva je puta veći od kuta β. Pravac koji prolazi vrhom A i okomit je na pravac AB siječe pravac BC u točki D. Pravac koji je usporedan s pravcem AD i prolazi polovištem stranice $\overline{AB}$ siječe pravac BC u točki E. Dokažite da je $|DE| = |AC|$.
3. Dokažite da je četverokut $ABCD$ paralelogram ako i samo ako se njegove dijagonale raspolavljaju.
4. Neka je P polovište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC. Neka pravac p kroz točku P siječe stranice $\overline{AC}$ u točki Q. Dokažite da je Q polovište stranice $\overline{AC}$ ako i samo ako su pravci p i BC paralelni.
5. Neka je $ABCD$ četverokut te K, L, M, N redom polovišta njegovih stranica. Dokažite da je $KLMN$ paralelogram.
6. U trokutu ABC točka P je polovište stranice $\overline{BC}$. Iz vrhova B i C spuštene su okomice na pravac AP koje taj pravac sijeku u točkama D i E. Dokažite da je $|BE| = |DC|$.

7. U trokutu ABC nacrtane su težišnice $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$. Ako je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABE = 30^\circ$, dokaži da je trokut ABC jednakostraničan.

8. Neka je ABC jednakokračan trokut i neka je $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Ako je točka D u unutrašnjosti trokuta takva da je $\sphericalangle ABD = 30^\circ$ i $|AB| = |DB|$, dokaži da je $|AD| = |CD|$.

9. U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 80^\circ$. Neka je točka M na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|CM| = |AB|$. Odredi $\sphericalangle AMB$.

10. Svaka stranica kvadrata $ABCD$ ima duljinu 1. Točke P i Q pripadaju stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{DA}$, redom. Ako opseg trokuta APQ iznosi 2, odredi $\sphericalangle PCQ$.

11. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirani su prema van kvadrati $ABDE$ i $BCKM$. Ako je P polovište dužine $\overline{AC}$, dokaži da je
$$|DM| = 2|BP|.$$

12. U trokutu ABC kut kod vrha A je dvostruko veći od kuta kod vrha B. Neka simetrala kuta kod vrha C siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Dokaži da vrijedi
$$|BC| = |AD| + |AC|.$$

13. Dan je jednakostranični trokut ABC. Na visini $\overline{CD}$ dana je točka M takva da je $\sphericalangle MAD = 15^\circ$. Dokaži da je $|AB| = |CD| + |MD|$.

14. U trokutu ABC vrijedi $|AB| = |AC|$, a simetrala kuta $\angle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki D tako da je $|BC| = |BD| + |AD|$. Odredi kutove tog trokuta.

15. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut u kojem vrijedi $|AD| = |AB| + |CD|$. Dokaži da se simetrale kutova $\angle ABC$ i $\angle BCD$ sijeku na dužini $\overline{AD}$.

16. Na pravcu p istaknute su točke C i D, tako da je $|CD| = 114$. S iste strane pravca p odabrane su točke A i B tako da su pravci AC i BD okomiti na p, pri čemu je $|AC| = 13$ i $|BD| = 65$. Na dužini $\overline{CD}$ odabrana je točka P, tako da je zbroj $|AP| + |PB|$ najmanji moguć. Kolike su duljine dužina $\overline{CP}$ i $\overline{PD}$?