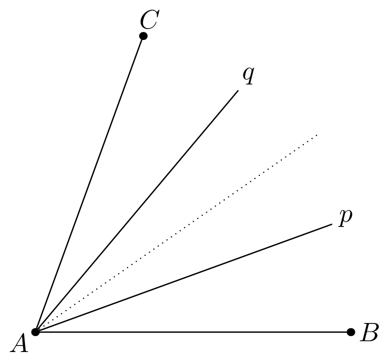
Izogonalni konjugati

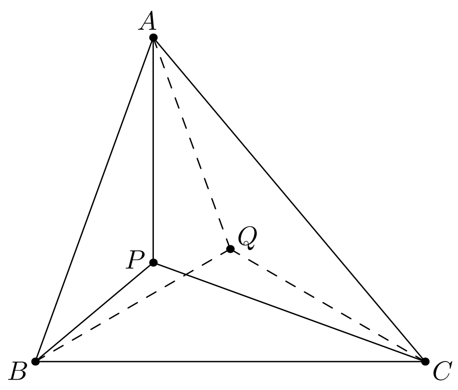
Marko Jukić

11. prosinca 2016.

Definicija (Izogonalni pravac): *Neka su A, B, C točke i neka je p pravac kroz točku A. Neka je q osnosimetrična slika pravca p s obzirom na simetralu kuta $\angle BAC$. Tada kažemo da je pravac q izogonalan pravcu p u odnosu na kut $\angle BAC$, odnosno da su pravci p i q izogonalni u odnosu na kut $\angle BAC$.*



Teorem (Izogonalni konjugat): *Neka je ABC trokut i neka je P točka. Tada su pravci izogonalni pravcima AP, BP i CP u odnosu na $\angle BAC$, $\angle CBA$ i $\angle ACB$ redom konkurentni Q. Točku Q zovemo izogonalni konjugat točke P u odnosu na trokut ABC i kažemo da su P i Q izogonalni konjugati u odnosu na trokut ABC.*



Neki poznati izogonalni konjugati:

1. Centar upisane kružnice $\leftrightarrow$ Centar upisane kružnice
2. Centar opisane kružnice $\leftrightarrow$ Ortocentar
3. Prva Fermatova točka $\leftrightarrow$ Druga Fermatova točka
4. Gergonnova točka $\leftrightarrow$ Insimilicentar od opisane i upisane kružnice
5. Nagelova točka $\leftrightarrow$ Exsimilicentar od opisane i upisane kružnice

Zadaci

1. Neka je ABC trokut. Neka je M polovište stranice BC i neka je X sjecište tangentni iz B i C na $\odot ABC$. Dokaži da vrijedi $\angle BAM = \angle XAC$.
(Simedijana)

2. Neka je ABC trokut i neka je M polovište stranice BC. Neka simetrale stranica AB i AC sijeku AM u D i E redom. Pravci BD i CE se sijeku u F. Ako je O centar opisane kružnice trokta ABC, dokaži da točke A, F, O i polovišta stranica AB i AC leže na kružnici. *(USAMO 2008)*

3. Neka je ABC trokut i neka je P točka na $\odot ABC$. Neka su D, E, F preslike točke P preko BC, CA, AB redom. Dokaži da su D, E, F kolinearni.
(Steinerov pravac)

4. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut. Neka je E sjecište dijagonala AC i BD i neka su P, Q, R nožišta okomica iz E na AB, BC, DA redom. Neka je S polovište stranice AB. Dokaži da je $PSQR$ tetivan.

5. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut. Neka je E sjecište dijagonala AC i BD. Neka se polupravci DA i CB sijeku u F. Neka je G točka takva da je $ECGD$ paralelogram, i neka je H preslika točke E preko pravca AD. Dokaži da su D, H, F, G konciklične. *(Shortlist 2012 G2)*

6. Neka je P točka unutar trokuta ABC. Neka pravci AP, BP i CP sijeku $\odot ABC$ u T, S i R redom. Neka je U točka na dužini PT. Pravac kroz U paralelan sa AB siječe CR u W, a pravac kroz U paralelan sa AC siječe BS u V. Pravac kroz B paralelan sa CP siječe pravac kroz C paralelan sa BP u Q. Ako su RS i VW paralelni, dokaži da je $\angle CAP = \angle BAQ$. *(Taiwan 2014 TST)*

7. Neka je ABC trokut, i neka su A' i X točke na simetrali $\angle BAC$. Pravci BX i CX sijeku AC i AB redom u B' i C'. Neka je $P = BX \cap A'C'$ i $Q = CX \cap A'B'$. Dokaži da je $\angle PAC = \angle QAB$. *(Turnir gradova 2016)*

8. Neka je ABC trokut i neka je D točka. Pravci paralelni s AD kroz B i C sijeku vanjsku simetralu kuta $\angle BAC$ u N i M redom. Ako je $E = BM \cap CN$. Dokaži da je $\angle BAE = \angle DAC$.

9. Neka je $\triangle ABC$ trokut i neka je M točka u njegovoj unutrašnjosti. BM siječe AC u N. K je preslika od M preko AC. BK siječe AC u P. Ako je $\angle AMP = \angle CMN$, dokaži da je $\angle ABP = \angle CBN$. *(IZHO 2015)*

10. Neka je O centar opisane kružnice trokuta ABC. Neka su $\triangle DEF$ i $\triangle XYZ$ redom nožišni i tangencijalni trokut trokuta ABC. Dokaži da je izogonalni konjugat točke O u odnosu na DEF ortocentar trokuta XYZ.