Optimizacija i konstrukcije

Zadatci

1. Nađi najmanji n tako da da između n brojeva možemo uvijek izabrati 3 takva da im je zbroj djeljiv s 3.

2. Koordinatna mreža $4 \times n$ je skup od $4n$ točaka podijeljenih u n redaka i 4 stupca. Nađi najveći prirodan broj n takav da u $n \times 4$ koordinatnoj mreži možemo točno polovicu točaka obojati crveno tako da ne postoji pravokutnik s vrhovima u točkama te koordinatne mreže čije su stranice paralelne retcima, odnosno stupcima tablice i čiji su svi vrhovi obojani crvenom bojom.

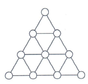
3. Nađi najmanji n tako da da između n brojeva možemo uvijek izabrati 6 takva da im je zbroj djeljiv s 6.

4. Koordinatna mreža $n \times n$ je skup od n^2 točaka podijeljenih u n redaka i n stupaca. Nađi najmanji prirodan broj n takav da u $n \times n$ koordinatnoj mreži možemo u svakom retku obojati točno 4 takve točke u plavu boju tako da ne postoji pravokutnik s vrhovima u točkama te koordinatne mreže čije su stranice paralelne retcima, odnosno stupcima tablice i čiji su svi vrhovi obojani plavom bojom.

5. Zadana je tablica $5 \times n$ u kojoj je svako polje obojano u crvenu ili plavu boju. Nađi najmanji prirodni broj n za koji se uvijek mogu odabrati tri retka i tri stupca takva da je svih 9 polja u njihovom presjeku iste boje.

6. Dana je tablica 6×6. Nađi najveći prirodni broj n tako da, na koji god način obojimo n polja tablice u crvenu boju, je moguće odabrati tri retka i tri stupca koji sadrže sva crveno obojana polja.

7. Brojevi 1, 2, ... , 10 raspoređeni su u kružiće na slici, a zatim je u svaki od devet malih trokuta upisan zbroj brojeva upisanih u njegove vrhove. Zbrojimo brojeve upisane u neka tri trokuta i odredimo najveći od tih brojeva. Koliki taj zbroj mora minimalno iznositi?



8. Zemljište dimenzija 5×10 podijeljeno je na 50 čestica - jediničnih kvadratića. Svaka je čestica u početnom stanju ili obrasla u korov ili je očišćena - na početku je m čestica obraslo u korov. Korov se širi na susjedne čestice na sljedeći način: svake godine one čestice koje su imale dvije susjedne čestice (sa zajedničkom stranicom) obrasle u korov i same obrastu u korov.

   Odredi najmanji m takav da, nakon konačnog broja godina, cijelo zemljište mora obrasti u korov.

Lijep i težak zadatak

9. Nađi najmanji n tako da iz svakog n-članog podskupa skupa prirodnih brojeva možemo odabrati četiri različita elementa a, b, c i d tako da brojevi $a+b$ i $c+d$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 20.

Zadatak za rad kod kuće

10. Nađi najmanji prirodni broj n takav da između n prirodnih brojeva uvijek možemo izabrati 4 tako da njihov zbroj bude djeljiv s 4.

11. Neka je S skup prvih 50 prirodnih brojeva. Koliko najviše elemenata može imati podskup A skupa S, koji zadovoljava sljedeći uvjet

$$x \in A \implies 3x \notin A \quad ?$$

12. Dvanaest prijateljica izlazi na večeru i raspoređuje se za 3 stola, pri čemu za svakim stolom sjede po četiri. One su se dogovorile kako će izlaziti na večeru sve dok svaka od njih ne bude barem jednom za istim stolom sa svim preostalim prijateljicama. Koliko minimalno puta one moraju izaći na večeru ?