

# IMO pripreme 2016 – Teorija grafova

---

sastavio: Mislav Balunović

6. 6. 2015.

- 1. zadatak:** U nekoj državi postoji 2016 gradova. Neki gradovi su međusobno povezani dvosmjernim cestama na način da iz svakog grada vodi barem jedna cesta. Ako za neki podskup gradova vrijedi da je svaki grad koji nije u podskupu povezan sa barem jednim gradom iz tog podskupa, onda je u podskupu barem  $k > 1$  gradova. Dokaži da se država može podijeliti u točno  $2016 - k$  regija na način da niti jedna dva grada iz iste regije nisu povezana cestom.
- 2. zadatak:** Neka je  $G = (V, E)$  graf sa  $n$  čvorova i  $\frac{nd}{2}$  bridova,  $d \geq 1$ . Dokaži da je moguće odabrati barem  $\frac{n}{2d}$  čvorova tako da niti jedna dva odabrana čvora nisu povezana bridom.
- 3. zadatak:** Neka je  $G = (V, E)$  turnir (potpuni usmjereni graf) čiji je svaki brid obojan crveno ili plavo. Dokaži da postoji čvor  $v$  takav da za svaki drugi čvor  $w$  postoji jednobojan put od čvora  $v$  do čvora  $w$ .
- 4. zadatak:** Neka je  $k$  prirodan broj. Dokaži da postoji graf  $G = (V, E)$  koji ne sadrži trokut i čiji je kromatski broj barem  $k$ . Kromatski broj grafa je najmanji broj boja u koji možemo obojati čvorove na način da niti jedna dva čvora povezana bridom nisu obojana istom bojom.