TB - nizovi, funkcije i polinomi

Zadaci

1. Fibonacciev niz zadan je relacijom:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_1 = F_2 = 1.$$

Dokažite da se između F_n i F_{n+1} uvijek nalazi potpun kvadrat, za sve prirodne brojeve $n \geq 6$.

2. (*Hrvatska 1980*) Neka je dana funkcija $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ sa svojstvima $D(1) = 0,\ D(p) = 1$, za svaki prost broj p; $D(uv) = uD(v) + vD(u)$, za sve prirodne brojeve $u, v \in \mathbb{N}$. Za koje vrijednosti od n je $D(n) = n$?

3. Dokažite da u nizu $\lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ ima beskonačno mnogo potencija broja 2.

4. Neka je a cijeli broj takav da $5 \nmid a$. Dokažite da je polinom $P(x) = x^5 - x + a$ ireducibilan nad $\mathbb{Z}$.

5. (*Prijedlog za IMO 2004*) Zadana je funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je za sve $m, n \in \mathbb{N}$ broj $(m^2 + n)^2$ djeljiv s $(f(m))^2 + f(n)$. Dokažite da je $f(n) = n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

6. (*Prijedlog za IMO 1998*) Neka je (a_n) niz takav da je $a_0 = a_1 = 5$ i

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{98}$$

za sve prirodne brojeve n. Dokažite da je $\dfrac{a_n + 1}{6}$ potpun kvadrat za sve nenegativne cijele brojeve n.

7. (*Poljska 2003*) Pronađite sve polinome W s cjelobrojnim koeficijentima koji zadovoljavaju uvjet da je za svaki prirodan broj n, $2^n - 1$ djeljivo s $W(n)$.

8. (*Irska 1999*) Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zadovoljava:

$(i) f(ab) = f(a)f(b)$, za a i b relativno proste

$(ii) f(p + q) = f(p) + f(q)$, za sve proste brojeve p i q.

Odredite $f(1999)$.

Rješenja

1. Tvrdnja očito vrijedi za $n = 6$ i $n = 7$, budući da je $F_6 = 8 < 9 < F_7 = 13 < 16 < F_8 = 21$. Ako je $n \geq 8$, onda

$$\sqrt{F_{n+1}} - \sqrt{F_n} = \frac{F_{n+1} - F_n}{\sqrt{F_{n+1}} + \sqrt{F_n}} \geq \frac{F_{n-1}}{2\sqrt{F_{n+1}}} \geq \frac{F_{n-1}}{2\sqrt{3F_{n-1}}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{F_{n-1}} > 1$$

pa je stoga između F_n i F_{n+1} uvijek potpun kvadrat.

2. Promatrajmo funkciju $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiranu s $F(n) = \dfrac{D(n)}{n}$. Tada je $F(1) = 0, F(p) = \dfrac{1}{p}$, za sve proste brojeve p, te $F(uv) = F(u) + F(v)$. Treba naći sve one $n \in \mathbb{N}$ za koje je $F(n) = 1$. Ako je $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, onda je
$$F(n) = \alpha_1 F(p_1) + \cdots + \alpha_k F(p_k) = \frac{\alpha_1}{p_1} + \cdots + \frac{\alpha_k}{p_k}.$$
Iz relacije
$$\frac{\alpha_1}{p_1} + \cdots + \frac{\alpha_k}{p_k} = 1$$
zaključujemo da je $0 < \alpha_i \leq p_i$, za $i = 1, \ldots, k$. Također, za $i \in \{1, \ldots, k\}$ množeći gornju relaciju s $p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k$ dobivamo da je broj
$$\frac{\alpha_i}{p_i} p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k$$
prirodan, što znači da $p_i \mid \alpha_i$, tj. da je $\alpha_i = p_i$. Odavde slijedi da je $k = 1$, tj. $n = p^p$ za neki prost broj p.

3. U binarnom obliku $\sqrt{2} = \overline{b_0.b_1b_2\ldots}$, pri čemu je $b_i \in \{0, 1\}$. Budući da je $\sqrt{2}$ iracionalan, znamo da postoji beskonačno mnogo i-eva takvih da je $b_i = 1$. Ako je $b_k = 1$, onda postavljanjem $m = \lfloor 2^{k-1}\sqrt{2} \rfloor = b_0 b_1 \ldots b_{k-1}$ dobivamo nejednakosti
$$2^{k-1}\sqrt{2} - 1 < m < 2^{k-1}\sqrt{2} - \frac{1}{2}$$
(lijeva nejednakost dolazi od svojstva funkcije najveće cijelo, a desna od $b_k = 1$.) Množenjem sa $\sqrt{2}$ i dodavanjem $\sqrt{2}$ slijedi
$$2^k < (m+1)\sqrt{2} < 2^k + \frac{\sqrt{2}}{2} < 2^k + 1,$$
iz čega odmah slijedi da je $\lfloor (m+1)\sqrt{2} \rfloor = 2^k$.

4. Pretpostavimo prvo da postoji rastav od $P(x)$ na oblik $P(x) = (x-b) \cdot g(x)$. Tada je $P(b) = 0$ i iz toga $b^5 - b = -a$. Budući da je 5 prost, prema Malom Fermatovom teoremu vrijedi $b^5 - b \equiv 0 \pmod 5$, iz čega dobivamo da je a djeljiv s 5 što je kontradikcija.

   Pretpostavimo sada da postoji rastav u oblik $P(x) = (x^2 - bx - c) \cdot h(x)$. Dijeljenjem $x^5 - x + a$ s $x^2 - bx - c$ dobivamo ostatak $(b^4 + 3b^2c + c^2 - 1)x + (b^3c + 2bc^2 + a)$ koji mora biti nul-polinom. Stoga je $b^4 + 3b^2c + c^2 - 1 = 0$ i $b^3c + 2bc^2 + a = 0$, iz čega sređivanjem dobivamo $b^5 - b - 5bc^2 = 3a$. Lijeva strana je djeljiva s 5, pa mora i desna, iz čega ponovo dobivamo da je a djeljiv s 5. Kontradikcija.

5. Postavljanjem $m = n = 1$ u zadanu relaciju dobivamo da je $f^2(1) + f(1)$ pozitivni djeljitelj od $(1^2 + 1)^2$. S obzirom da jednadžba $t^2 + t = 4$ nema cjelobrojnih korijena, te da je $f^2(1) + f(1)$ veće od jedan, jedina mogućnost je $f^2(1) + f(1) = 2$, pa je $f(1) = 1$.

   Sada postavimo $m = 1$ u funkcionalnu jednadžbu kako bismo dobili da $f(n) + 1$ dijeli $(n + 1)^2$ za sve prirodne brojeve n. Postavljanje $n = 1$ dodatno daje da $(f(m))^2 + 1$ dijeli $(m^2 + 1)^2$ za sve prirodne brojeve m.

Sljedeće dokazujemo da je $f(p-1) = p-1$ za sve proste brojeve p. Budući da $f(p-1)+1$ dijeli p^2, vrijedi da je $f(p-1)$ ili jednak $p-1$ ili p^2-1. Ako je $f(p-1) = p^2-1$, onda $f(1) + f(p-1)^2 = p^4 - 2p^2 + 2$ dijeli $(1+(p-1)^2)^2 < p^4-2p^2+2$, kontradikcija. Zato je $f(p-1) = p-1$. Dobili smo dakle beskonačno mnogo prirodnih brojeva k takvih da je $f(k) = k$, to ćemo iskoristiti da bismo dokazali tvrdnju za sve $n \in \mathbb{N}$.

Fiksirajmo prirodni broj n. Za sve k takve da je $f(k) = k$, broj $k^2 + f(n) = (f(k))^2 + f(n)$ dijeli $(k^2+n)^2$, prema pretpostavci. S druge strane, $(k^2+n)^2$ možemo zapisati kao

$$(k^2+n)^2 = [(k^2 + f(n)) + (n - f(n))]^2 = A(k^2 + f(n)) + (n - f(n))^2$$

za neki cijeli broj A. Slijedi da je $(n - f(n))^2$ djeljiv s $k^2 + f(n)$ za sve k za koje je $f(k) = k$. Kako postoji beskonačno mnogo takvih k, zaključujemo da je $(n - f(n))^2$ djeljiv s proizvoljno velikim brojevima, pa mora biti $(n - f(n))^2 = 0$, odnosno $f(n) = n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

6. Neka je $b_n = \dfrac{a_n + 1}{6}$ za sve $n \geq 0$. Tada je $b_0 = b_1 = 1$ i

$$b_{n+1} = 98b_n - b_{n-1} - 16$$

za $n \geq 1$ (što posljedično daje da je b_n uvijek cijeli broj). Nadalje, za $n \geq 2$,

$$b_{n+1} = 98b_n - b_{n-1} - (98b_{n-1} - b_n - b_{n-2}) = 99b_n - 99b_{n-1} + b_{n-2}.$$

Neka je $c_0 = c_1 = 1$, i neka je $c_n = 10c_{n-1} - c_{n-2}$ za $n \geq 2$. Dokazat ćemo indukcijom da je $b_n = c_n^2$ za sve n. To očito vrijedi za $n = 0, 1, 2$ (jer je $b_2 = 98 - 17 = 81$ i $c_2 = 10 - 1 = 9$), a prepostavljajući tvrdnju za $b_1, \ldots, b_n$ imamo

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 99c_n^2 - 99c_{n-1}^2 + c_{n-2}^2 \\ &= 99c_n^2 - 99c_{n-1}^2 + (10c_{n-1} - c_n)^2 \\ &= 100c_n^2 - 20c_nc_{n-1} + c_{n-1}^2 \\ &= (10c_n - c_{n-1})^2 = c_{n+1}^2. \end{aligned}$$

□

7. Pretpostavimo za neki n vrijedi $W(n) \neq \pm 1$. Tada $W(n)$ ima neparnog prostog djeljitelja q koji dijeli $2^n - 1$. Očito, $W(n+q) \equiv W(n) \equiv 0 \pmod{q}$, pa q također dijeli $W(n+q)$, koji dijeli $2^{n+q} - 1$. Stoga $2^{n+q} \equiv 1 \equiv 2^n \pmod{q}$. Kako je q neparan prost broj, prethodnu kongruenciju smijemo podijeliti s 2^n kako bismo dobili $2^q \equiv 1 \pmod{q}$. No prema Malom Fermatovom teoremu $2^q \equiv 2 \pmod{q}$, pa $2 \equiv 1 \pmod{q}$, kontradikcija.

Stoga je $W(n) = \pm 1$, za sve n. Budući da su svi polinomi koji su ograničeni nad $\mathbb{N}$ konstantni, slijedi da su $W = 1$ i $W = -1$ jedina moguća rješenja.

8. Definirajmo sljedeći zapis: $(i)_{a,b}$ kad uvrstimo (a,b) (gdje su a i b relativno prosti) u (i), te $(ii)_{p,q}$ kad uvrstimo (p,q) (gdje su p i q prosti) u (ii).

Pronađimo prvo $f(1)$, $f(2)$, i $f(4)$. Iz $(i)_{1,b}$ nalazimo $f(1) = 1$. Iz $(i)_{2,3}$ dobivamo $f(6) = f(2)f(3)$; iz $(ii)_{3,3}$ dobivamo $f(6) = 2f(3)$; stoga, $f(2) =$

2. Sada iz $(ii)_{2,2}$ imamo $f(4) = 4$. Uočimo da je 1999 prost broj, pa $f(1999)$ možemo izračunati kao $f(1999) = f(2002) - f(3)$. Za to nam trebaju $f(3)$ te $f(2002) = f(2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13) = f(2)f(7)f(11)f(13)$, pa izračunajmo sve ove vrijednosti i gotovi smo.

Iz $(ii)_{3,2}$i $(ii)_{5,2}$, respektivno, dobivamo $f(5) = f(3) + 2, f(7) = f(5) + 2 = f(3) + 4$. Sada možemo naći $f(3)$. Iz $(ii)_{5,7}$ imamo $f(12) = f(5) + f(7) = 2f(3) + 6$; iz $(i)_{4,3}$ imamo $f(12) = 4f(3)$; iz čega je $f(3) = 3$. Sada je jasno $f(5) = 5, f(7) = 7$.

Pronađimo $f(13)$ i $f(11)$. Prema $(i)_{3,5}$, dobivamo $f(15) = 15$. Iz $(ii)_{13,2}$ i $(ii)_{11,2}$, respektivno, nalazimo $f(13) = f(15) - f(2) = 13, f(11) = f(13) - f(2) = 11$. Konačno, $f(1999) = f(2002) - f(3) = 1999$.