Harmoniteti

Matija Bucić, Domagoj Ćevid

20. lipnja 2016.

1 Uvod

Harmoniteti su jedan od veoma korisnih alata koje jedan olimpijac treba znati. To je posebna konfiguracija točaka ili pravaca koja se pojavljuje izrazito često u geometriji. Harmoniteti omogućavaju da na jednostavan način saznate neke činjenice koje možda nisu nimalo očite i da za čiji dokaz bi trebalo koristiti puno računanja.

Prije nego krenete na posao, imajte na umu da su harmoniteti jako korisna tehnika koja omogućava relativno lako rješavanje velike količine zadataka, ali i zahtijeva određeno predznanje iz geometrije. Nemojte očekivati da su harmoniteti čarobni štapić kojim mahnete i sve se riješi samo od sebe. Većina zadataka zahtijeva kombiniranje različitih ideja s onima koje ćemo vam ovdje predstaviti, a prepoznavanje i sposobnost primjene ideja može se postići samo vježbom.

Osim da vas nauči koristiti harmonitete, ovi materijali bi vam trebali poboljšati opće znanje geometrije kroz dokaze raznih lema i činjenica, stoga barem pokušajte sami dokazati svaku lemu i riješiti svaki zadatak prije nego pogledate rješenje. Jednako tako, ako ste riješili zadatak, svejedno pročitajte ovdje napisano rješenje jer obično sadrži neke korisne komentare i savjete.

Cilj ove skripte nije samo da vas nauči harmonitete nego i da vam da širu sliku o njima. Vidjet ćemo kako se oni uklapaju u ostale stvari u geometriji.

Za natjecanja postoje tri korisne vrste transformacija za koje znamo: afine transformacije, projektivne transformacije i inverzija. Opisat ćemo svaku ukratko i navesti osnovna svojstva te pokazati kako se koriste te kako su povezani sa harmonitetima. Ukoliko želite saznati više o njima pogledajte dodatne materijale na kraju skripte.

Za razumijevanje harmoniteta, važno je shvatiti projektivne tranformacije, a da bi vam bilo lakše proći kroz projektivne transformacije, krenut ćemo s njihovim posebnim slučajem: afinim transformacijama. Vrlo kratko ćemo spomenuti i inverziju s obzirom da su određeni koncepti direktno povezani.

Uživajte :)

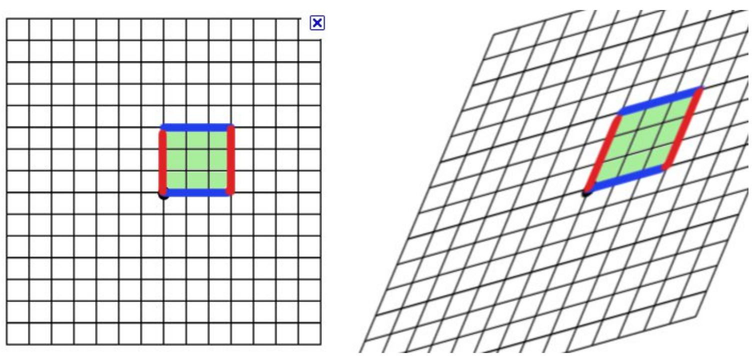
2 Afine transformacije

Više informacija u dodatnom materijalu 1.

Transformacije ravnine Ideja kod svih transformacija ravnine je da primijenimo određeno preslikavanje ravnine koje će preslikati našu skicu u neku novu. Svaki objekt na skici se slika u određeni objekt u novoj skici. Mi bi htjeli da na novoj skici vrijedi dovoljno stvari da bi mogli nešto zaključiti, stoga moramo pametno odabrati našu transformaciju. Također, sva saznanja na novoj skici moramo nekako moći iskoristiti da bi stekli saznanja na staroj skici, tj. naša transformacija mora čuvati određena svojstva.

Neke transformacije se mogu opisati na geometrijski način, ali je uglavnom jednostavnije i bolje razmišljati o njima kao nekakvom apstraktnom preslikavanju o kojemu samo znate da vrijede određene tvrdnje (iako se naravno te tvrdnje dokazuju iz te geometrijske definicije).

Geometrijska interpretacija Afina transformacija je promjena baze našeg kordinatnog sustava, tj. linearna transformacija naše ravnine. To možemo zamisliti kao da mi uzmemo koordinatne osi i onda ih rastežemo ili stišćemo, zamijenimo osi ili stisnemo koordinatne osi jednu prema drugoj ili jednu od druge.



Stupanj slobode Afinom transformacijom možemo preslikati bilo koji trokut u bilo koji drugi. Ako ste preslikali trokut ABC u trokut $A'B'C'$, jedinstveno ste odredili sliku svake druge točke u ravnini. Dakle, ako hoćete odrediti gdje su se ostale točke preslikale, morate koristiti svojstva afinih transformacija.

Za afine transformacije, uglavnom se ne koristi ništa drugo osim ovih svojstava:

Osnovna svojstva:

- Pravci se preslikavaju u pravce.
- Kolinearne točke se preslikavaju u kolinearne točke.
- Pravci koji se sijeku u točki A se preslikavaju u pravce koji se sijeku u slici točke A.
- Paralelni pravci se preslikavaju u paralelne pravce.

  Recimo da imate točke A, B, C i točku D takvu da je $ABCD$ paralelogram. Preslikate li točke A, B, C u bilo koje druge tri točke A', B', C' možete zaključiti da se točka D preslikala u točku D' takvu da je $A'B'C'D'$ paralelogram. (S obzirom da su pravci AB

i CD bili paralelni onda moraju biti i $A'B'$ te $C'D'$ analogno za $B'C'$i $A'D'$). Iz toga možete jedinstveno odrediti sliku točke D'

- Omjeri na paralelnim pravcima su očuvani.

  Npr. ako imate tri kolinearne točke X, Y, Z (dakle vrijedi $XY \| YZ$) i preslikate ih u X', Y', Z' onda vrijedi $\frac{XY}{YZ} = \frac{X'Y'}{Y'Z'}$.

- Omjeri površina su očuvani.

  Ako je pri afinoj transformaciji trokut ABC preslikan u $A'B'C'$ i trokut DEF u $D'E'F'$ onda je $P_{ABC}/P_{A'B'C'} = P_{DEF}/P_{D'E'F'}$.

Recimo da vas za trokut ABC zanima omjer $\frac{AT}{TM}$ gdje je T težište a M polovište stranice BC. Možemo primijeniti afinu transformaciju koja preslikava ABC u jednakostranični trokut $A'B'C'$. Točka M se preslikala u točku M', a kako su B, M, C kolinearne i $\frac{BM}{CM} = 1$, slijedi da je i $\frac{B'M'}{C'M'} = 1$, a slijedi i da je $\frac{AT}{TM} = \frac{A'T'}{T'M'}$. Dakle, problem smo sveli na specijalan slučaj u kojem je lakše dokazati tvrdnju.

Zadatak 1. Da li za bilo koje 4 točke A, B, C, D koje su preslikane afinom transformacijom u A', B', C' i D' vrijedi da je $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$?

Rješenje. Za kontraprimjer uzmite raznostranični trokut XYZ koji možemo preslikati u jednakostranični trokut $X'Y'Z'$. Neka su A, B, C, D redom X, Y, Z, X. Dobivamo $1 = \frac{AB}{CD} \neq \frac{A'B'}{C'D'}$ □

Zadatak 2. Kroz svaki vrh trokuta povučena su po dva pravca koji nasuprotne stranice trokuta dijele u tri jednaka dijela. Dokažite da se dijagonale koje prolaze nasuprotnim vrhovima šesterokuta formiranog ovim pravcima sijeku u jednoj točki.

Rješenje. Ako primijenimo afinu transformaciju koja slika naš trokut u jednakostraničan, onda zbog očuvanja omjera vrijedi da pravci iz svakog vrha dijele nasuprotnu stranicu na tri dijela. Zbog simetrije imamo da je šesterokut formiran tim pravcima pravilan pa mu se dijagonale sijeku u jednoj točki kao što smo i htjeli. □

Komentari Afine transformacije su vrlo jednostavna stvar koja rijetko može pomoći. Međutim, nije loše imati ih na umu. Koliko puta vam se dogodilo dok ste rješavali zadatak da vam se čini da to što tvrdnja vrijedi u nekom specijalnom slučaju implicira da vrijedi i općenito ili da biste vrlo rado sveli problem na taj općeniti slučaj? Afine transformacije su metoda koja ponekad omogućava takav postupak. Postoje značajno "jače" metode koje tako funkcioniraju i sve su donekle temeljene na linearnoj algebri i vektorima (kao što su i afine transformacije), ali to baš i nije prikladno za srednju školu.

Ako vam se čini da u zadatku imate samo gore navedena svojstva, pokušajte razmisliti što se događa pri afinoj transformaciji. Možda se zadatak može pojednostaviti.

Za dodatnu vježbu, pogledajte zadatke 4 i 7 iz dodatnog materijala 1.

3 Projektivne transformacije

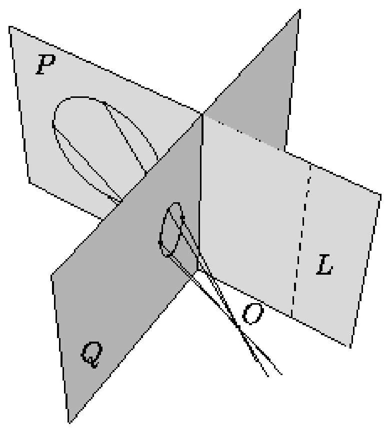
Više informacija u dodatnom materijalu 1.

Neka je P ravnina koja se nalazi u 3D i sadrži našu skicu. Neka je Q neka druga ravnina i O točka u prostoru. Centralna projekcija je preslikavanje koje slika neku točku T na P u sjecište pravca OT i ravnine Q. Projektivna transformacija je kompozicija centralnih projekcija.

Problem nastaje kada je naš pravac OT paralelan sa ravninom Q. Taj ćemo problem riješiti tako da ćemo definirati projektivnu ravninu:

Projektivna ravnina je jednostavno unija euklidske ravnine i objekta koji nazivamo pravac u beskonačnosti (apsolutni pravac). Postuliramo da se svaka dva paralelna pravca sijeku u nekoj točki na pravcu u beskonačnosti. Stoga, *svaka dva različita pravca uključujući onog u beskonačnosti se sijeku u točno jednoj točki.*

Centralna projekcija onda slika točke T tako da je OT paralelno sa Q u točke na pravcu u beskonačnosti. Stoga je projektivna transformacija bijekcija između projektivnih ravnina.



Filozofija Ljudi obično ne vole ideju da postoje točke u beskonačnosti, da se paralelni pravci sijeku i slično. Međutim, to su sve priče za malu djecu. To je slično kao da kažete da vam je čudna činjenica da svaki broj dijeli nulu. Naravno da je neuobičajeno, ali radi se jednostavno o tome da mi definiramo neke apstraktne koncepte kako bi nam bili korisni. Slično je npr. postojanje kompleksnih brojeva malkice neinituitvno, ali su izrazito korisni pa ih ima smisla definirati, dok definirati tahionima čestice koje putuju brže od svjetlosti nema smisla jer nisu korisni i ne možemo posredno preko njih ništa zaključivati.

Zato ćemo "definirati" projektivnu ravninu (neću biti potpuno rigorozan, ako niste zadovoljni, imate dodatni materijal 1 i internet na raspolaganju) i to tako da vrijedi:

- Svaki pravac dobiva dodatnu točku koju nazivamo točkom u beskonačnosti.
- Svaki pravac siječe pravac u beskonačnosti u točno jednoj točki (svojoj točki u beskonačnosti).
- Paralelni pravci se sijeku u svojim točkama u beskonačnosti.

Trenutno vjerojatno zamišljate sve ovo i smišljate neki način za vizualizaciju projektivne ravnine. Međutim, vratimo se nakratko na analogiju sa kompleksnim brojevima: ja osobno nemam problema zamisliti 3 jabuke ili 5 lješnjaka, ali nekako ne uspijevam zamisliti $3 + 2\imath$ jagoda. Što hoću reći je da zamišljanje projektivne ravnine nije toliko bitno, bitno je da znate neka svojstva i da znate ih koristiti.

Naravno, neki će od vas reći da možete zamisliti kompleksan broj kao točku u ravnini. Možete i pravce zamišljati kao krugove kružnice na nekoj velikoj sferi ili pravac u beskonačnosti zamišljati kao neki jako daleki pravac pa na skici malo zakrivite paralelne pravce tako da se presjeku na njemu.

Stupanj slobode je veći nego kod afinih transformacija: bilo koje 4 **nekolinearne** točke A, B, C, D se mogu jedinstveno preslikati u bilo koje 4 nekolinearne točke A', B', C', D'. Najčešće je to kvadrat.

Zanimljivo je da nakon što ste primijenili projektivnu transformaciju, imate na raspologanju još i afine transformacije jer su afine transformacije zapravo projektivne transformacije koje fiksiraju pravac u beskonačnosti (pa time ne gubite ništa na općenitosti jer je kompozicija dvije projektivne transformacije također projektivna transformacija).

Svojstva:

- *Bijekcija.* Projektivna transformacija je bijekcija dvaju projektivnih ravnina: svaka točka se preslika u točno jednu drugu točku i svaka je točka slike odnekud došla.
- *Pravci se preslikavaju u pravce* (uključujući onog u beskonačnosti).
- *Dvoomjeri su očuvani.* O ovom možete razmišljati kao o slabijoj verziji svojstva afinih transformacija da čuvaju omjere na pravcu.

Dvoomjer

Dvoomjer 4 različite **kolinearne** točke A, B, C, D definiramo kao

$$(A, B, C, D) = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC}$$

gdje dužine gledamo usmjereno.

Dvoomjer 4 različita **konkurentna** pravca a, b, c, d je

$$(a, b, c, d) = \frac{\sin\angle(a, c)}{\sin\angle(a, d)} \frac{\sin\angle(b, d)}{\sin\angle(b, c)}$$

gdje su kutovi orijentirani.

U dvoomjeru dozvoljavamo da su nam neke točke na pravcu u beskonačnosti. Definiramo:

$$(A, B, C, \infty) = \frac{AC}{BC}$$

Primijetite da je točka $D = \infty$ jednoznačno određena točka na pravcu u beskonačnosti, budući da točke A, B, C određuju pravac kojemu je D točka u beskonačnosti. Ako je neka druga točka umjesto D u beskonačnosti, jednostavno izbacite iz izraza dužine koje je sadrže u definiciji (formalnije: uzmite limes).

Još jedan poseban slučaj nastaje kada su sve 4 točke u beskonačnosti (ne zaboravite da postoji cijeli jedan pravac točaka u beskonačnosti). Najjednostavnije rješenje je da uzmete bilo koju neapsolutnu točku i uzmete pravce kroz tu točku kojima su A, B, C, D apsolutne točke, tada je (A, B, C, D) jednak dvoomjeru tih pravaca zbog sljedeće leme:

Lema 1. Za 4 konkurentna pravca a, b, c, d i 4 kolinearne točke A, B, C, D takve da je A na a, B na b, C na c i D na d, vrijedi:

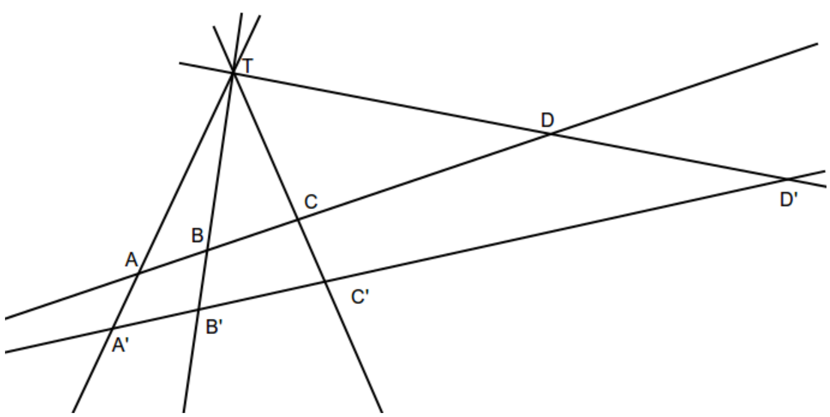
$$(a, b, c, d) = (A, B, C, D)$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, neka su A, B, C, D u tom redoslijedu na pravcu. Označimo točku presjeka od a, b, c, d sa T. Primijenimo sinusov poučak na trokute ATC, BTD, ATD, BTC redom:

$$\frac{\sin(\angle ATC)}{\sin(\angle TAC)} = \frac{AC}{TC} \qquad \frac{\sin(\angle BTD)}{\sin(\angle TBD)} = \frac{BD}{TD}$$

$$\frac{\sin(\angle TAC)}{\sin(\angle ATD)} = \frac{TD}{AD} \qquad \frac{\sin(\angle TBD)}{\sin(\angle BTC)} = \frac{TC}{BC}$$

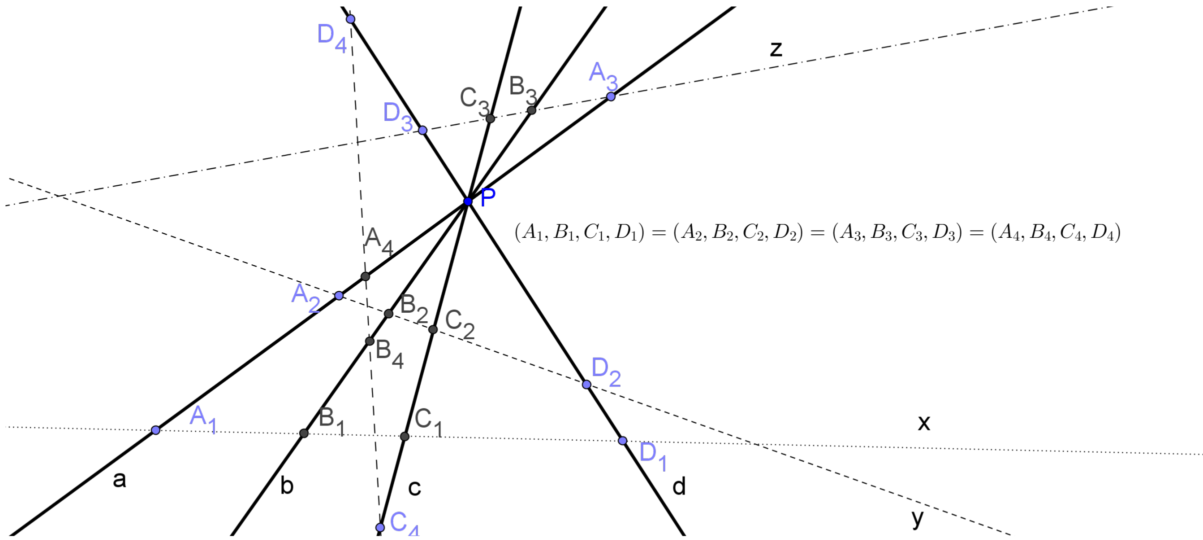
Množenjem te 4 jednakosti dobivamo traženu relaciju. □



Ova lema pokazuje da su definicije dvoomjera za točke i pravce jako usko povezane.

Korolar ove leme je da ako imamo kolinearne točke A', B', C', D' tako da se pravci AA', BB', CC', DD' sijeku u nekoj točki T, znamo da je $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$. Upravo zbog toga projektivna transformacija čuva dvoomjere, jer sve projiciramo iz neke određene točke.

Također, valja napomenuti da nije bitno s koje se strane točke T pravci sijeku:



Permutacije dvoomjera

$$(A, B, C, D) = (B, A, C, D)^{-1} = (A, B, D, C)^{-1}$$

$$(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$$

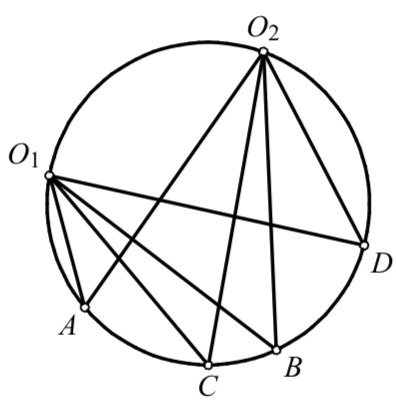
Dokaz je samo računanje. Označite $AB = x$, $BC = y$ i $CD = z$ i izrazite sve ostale dužine preko toga.

Lema 2. Projektivna transformacija čuva dvoomjere pravaca.

Dokaz. Ako imamo 4 pravca a, b, c, d, uzmimo pravac p koji siječe pravce a, b, c, d u A, B, C, D redom. Tada, jer projektivna transformacija čuva dvoomjere točaka, vrijedi:

$$(a, b, c, d) = (A, B, C, D) = (A', B', C', D') = (a', b', c', d')$$

gdje x' označava sliku od x. $\square$



Lema 3. Za konciklične točke A, B, C, D, O_1, O_2 vrijedi

$$(O_1A, O_1B, O_1C, O_1D) = (O_2A, O_2B, O_2C, O_2D)$$

Dokaz. Lema direktno slijedi iz jednakosti obodnih kutova. □

Za točke A, B, C, D na kružnici Γ se također definira $(A, B, C, D) = (OA, OB, OC, OD)$, gdje je O proizvoljna točka na Γ. ((OA, OB, OC, OD) ne ovisi o odabiru točke O, kao što smo vidjeli.)

Još je jedno važno svojstvo dvoomjera da jedinstveno određuju točke:

- Pretpostavimo da imamo točke A, B, C, D, E na pravcu tako da je $(A, B, C, D) = (A, B, C, E)$. Tada je $D \equiv E$.
- Pretpostavimo da imamo točke A, B, C, D, E na kružnici tako da je $(A, B, C, D) = (A, B, C, E)$. Tada je $D \equiv E$.

'Dokaz' Kako pomičemo točku D po pravcu/kružnici, tako se (A, B, C, D) mijenja monotono pa imamo $D \equiv E$.

Ovo je jako bitna činjenica i često se koristi kod harmoniteta, i osnova je za harmonijske četverokute. Recimo da želite dokazati da su tri pravca a, b, c konkurentna. Ideja je da definirate sjecište a i b kao X, a sjecište a i c kao X' te pokušate dokazati da su dvoomjeri na pravcu a koji uključuju X i X' jednaki. Tada možemo zaključiti da su X i X' iste točke. Za primjer pogledajte zadatke 5 i 6

Komentari

- Projektivne transformacije se najčešće koriste tako da se pravac sa skice koji sadrži mnogo točaka pošalje u pravac u beskonačnosti. Tada na novoj skici mnogo pravaca postane paralelno.
- Jako je teško i nepraktično koristiti projektivne transformacije kada nam skica sadrži kružnice, zato jer se one ne slikaju u kružnice već u hiperbole, parabole i elipse.
- Za razliku od afinih transformacija, uglavnom nije običaj crtati novu skicu na kojoj se prikazuje što se gdje preslikalo, već se češće samo koriste posredni zaključci. Npr. zaključite da postoji transformacija koji preslikava 4 kolinearne točke u druge četiri i onda znamo da im je dvoomjer jednak.
- Najkorisnije stvari koje se mogu raditi sa projektivnim transformacijama sadržane su upravo u harmonitetima. Zato nećemo previše ulaziti u detalje oko primjene projektivnih transformacija.

Idući je zadatak dobar za utvrditi osnovno razumijevanje projektivnih transformacija. Svrha ovog zadatka je da vam malo razjasni par gore spomenutih tvrdnji, bez obzira što konstrukcije ne spadaju u klasične olimpijske zadatke.

Zadatak 3. Četiri različite nekolinearne i neapsolutne točke A, B, C, D su preslikane pri projektivnoj transformaciji u neapsolutne točke A', B', C', D'. Dana je točka E u ravnini sa A, B, C, D. Konstruirajte sliku točke E pri toj projektivnoj transformaciji.

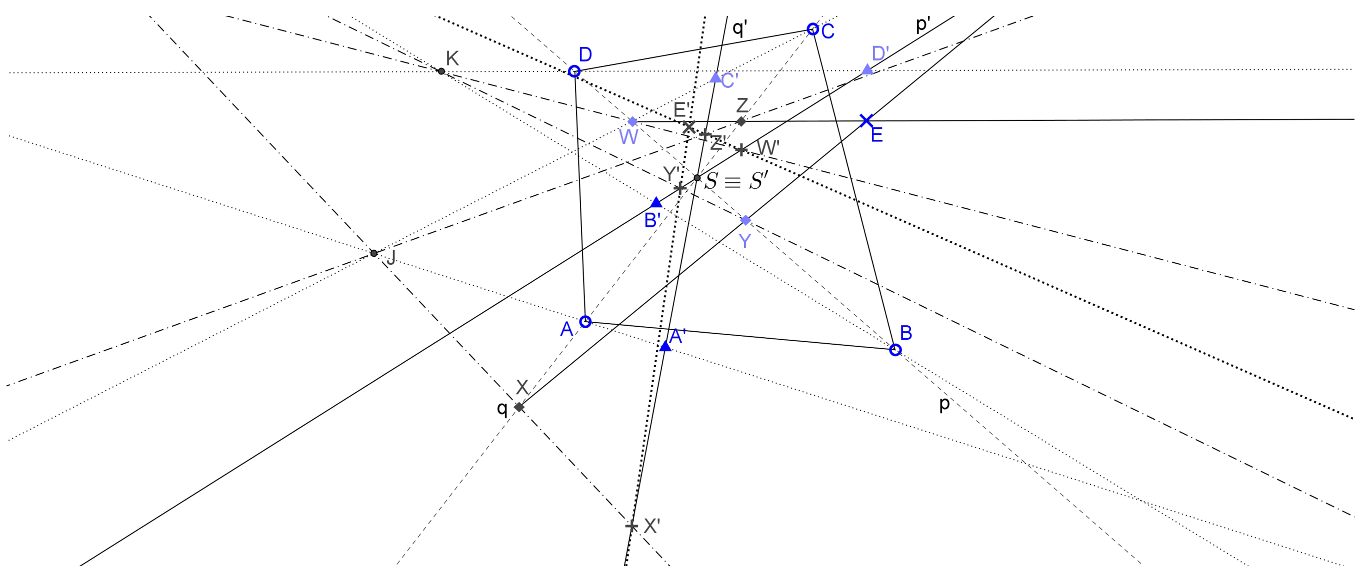
Pod konstruirati mislim opisati kako biste našli točku. Ne morate se pretjerano brinuti oko upotrebe šestara, ravnala i sličnih instrumenata.

Skica rješenja. Isti princip funkcionira i ako su neke točke u zadatku apsolutne, ali da izbjegnemo slučajeve ih i ne spominjem. Za točku E namjerno nisam rekao da je neapsolutna jer se ovako postavlja zanimljivo pitanje koje povezuje dva načina razmišljanja o projektivnim transformacijama: gdje će se u gornjoj situaciji preslikati apsolutni pravac?

Osnovna ideja je razmisliti o stvarima za koje znate gdje će se preslikati. To bi recimo mogli biti pravci kroz parove točaka A, B, C, D. Zatim razmislite o sjecištima tih pravaca (uz malo opreza sa apsolutnim točkama). Neka je S sjecište pravca AC kojeg nazovemo p i pravca BD kojeg nazovemo q i bez smanjenja općenitosti neka je S' neapsolutna. Translatirajte sliku tako da se S i S' podudaraju (naravno, na kraju morate translatirati nazad).

Da biste odredili sliku točke E, uzmite neke 4 točke X, Y, Z, W takve da su X i Z na p te Y i W na q tako da je E sjecište XZ i YW. Neka je K sjecište BB' i DD' te J sjecište AA' i CC'. X' i Z' su sada presjeci JX i JZ sa q' dok su Y' i W' presjeci KY i KW sa p'. Lako se vidi da se $X'Z'$ i $Y'W'$ sijeku u E'. Ako malo razmislite, vidjet ćete da isti princip radi i za apsolutnu točku E.

Sljedeća slika ilustrira konstrukciju. Znam da izgleda zastrašujuće, no ako ste razmislili malo o tome što se događa, vidjet ćete da jednostavno morate imati toliko točaka i da su sve dosta logične. ☐



Zadatak 4. *(Papusov teorem)* Dana su dva pravca p, q, točke A, B, C na p te D, E, F na q. Dokažite da su presjeci $X \equiv AE \cap BD$, $Y \equiv BF \cap CE$ te $Z \equiv CD \cap AF$ kolinearni.

Rješenje. Neka je $Z' \equiv CD \cap XY$, $T \equiv p \cap q$, $G \equiv CD \cap AE$ i $H \equiv BD \cap CE$.

Pramen iz X nam daje $(D, G, Z', C) = (H, E, Y, C)$, iz B dobivamo $(H, E, Y, C) = (D, E, F, T)$ te nam pramen iz A daje $(D, E, F, T) = (D, G, Z, C)$. Dakle, $(D, G, Z', C) = (D, G, Z, C)$ iz čega slijedi $Z \equiv Z'$.

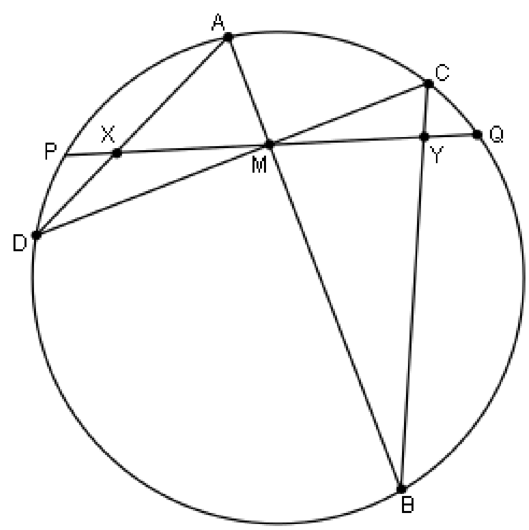
Alternativno, jednostavno pošaljite pravac ABC u beskonačnost i promotrite što se dogodi. □

Zadatak 5. *(Pascalov teorem)* Dana je kružnica k te točke A, B, C, D, E, F na k. Dokažite da su presjeci $X \equiv AE \cap BD$, $Y \equiv BF \cap CE$ te $Z \equiv CD \cap AF$ kolinearni.

Rješenje. Neka je $Z' \equiv CD \cap XY$, $G \equiv CD \cap AE$ i $H \equiv BD \cap CE$. Pramen iz X nam daje $(D, G, Z', C) = (H, E, Y, C)$ pa iz leme 1 dobivamo $(H, E, Y, C) = (BD, BE, BF, BC)$ te iz leme 3 dobivamo $(BD, BE, BF, BC) = (BD, BG, BZ, BC) = (D, G, Z, C)$.

Dakle $(D, G, Z', C) = (D, G, Z, C)$, iz čega slijedi $Z \equiv Z'$. □

Napomena: Pascalov teorem vrijedi i ako su neke od točaka A, B, C, D, E, F iste, gdje za pravac kroz T i T uzimamo da je tangenta na kružnicu u T. To možete zamisliti kao da jednu točku sve više i više približavamo drugoj. Pravac kroz te dvije točke se sve više približava tangenti.



Zadatak 6. *(Teorem o leptiru)* Dan je četverokut $ABCD$ upisan u kružnicu k. Neka mu je M sjecište dijagonala te neka je PQ tetiva k kojoj je M polovište. Neka su X, Y sjecišta PQ i AD te PQ i BC redom. Dokažite da je M polovište XY.

Rješenje. Iz leme 3 slijedi $(DP, DC, DA, DQ) = (BP, BC, BA, BQ)$. Nadalje, koristeći lemu 1, dobivamo $(P, M, X, Q) = (DP, DC, DA, DQ) = (BP, BC, BA, BQ) = (P, Y, M, Q)$.

Neka je X' centralnosimetrična slika od X u odnosu na M. Tada vrijedi $(P, Y, M, Q) = (P, M, X, Q) = (Q, M, X', P) = (P, X', M, Q)$ pa je nužno $Y \equiv X'$, kao što smo i htjeli. □

4 Inverzija

Više informacija u dodatnom materijalu 2.

Osnovni problem afinih i projektivnih transformacija je u tome da baš i nisu korisne ako u zadatku postoji ikakav krug. Problem je što će se sa projektivnom transformacijom kružnica preslikati u elipsu, parabolu ili hiperbolu, a planimetrijski su ti objekti relativno nezgodni za baratanje. Inverzija, sa druge strane, slika pravce i kružnice u pravce i kružnice pa katkada zna biti izrazito korisna.

Definicija Dana je točka O u ravnini koju nazivamo *centar inverzije* i neki pozitivni broj r koji se naziva *radijus inverzije*. Za svaku točku T u ravnini, slika od T je točka T' na polupravcu OT tako da je $OT \cdot OT' = r^2$

Svojstva

- Inverzija je sama sebi inverz, tj. ako se T slika u T', onda se i T' slika u T.
- Središte inverzije se slika u beskonačnost. Možemo zamisliti kao da postoji točka u beskonačnosti kroz koju prolaze svi pravci, tj sve pravce možemo tretirati kao kružnice (samo sa beskonačnim radijusom).
- Kružnica radijusa r sa središtem u O (*kružnica inverzije*) se slika sama u sebe. Točke izvan te kružnice se slikaju unutar te kružnice i obratno.
- Pravci kroz O se slikaju u sami sebe. Pravci koji ne prolaze kroz O se slikaju u kružnice kroz O.
- Kružnice se slikaju u kružnice ako ne prolaze kroz O, inače se slikaju u pravce.
- Inverzija čuva kutove. Pritom definiramo kut između dvije kružnice kao kut između njihovih tangenti u sjecištu.

Nećemo ulaziti pretjerano u inverziju, više informacija i zadataka nalazi se u dodatnom materijalu 2.

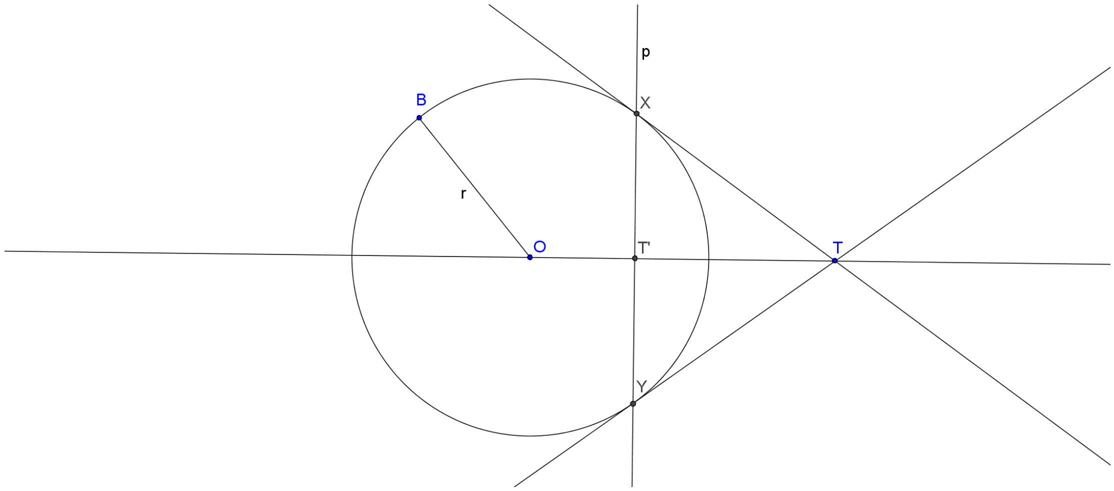
Komentari

- Inverzija je daleko sposobnija baratati kružnicama zbog gore navedenih svojstava.
- **Primjena** Inverziju uglavnom primjenjujemo u zadacima kada na skici imamo točku kroz koju prolazi mnogo kružnica i pravaca. Tu točku uzimamo kao središte inverzije. Tada jako dobro znamo gdje se pravci i kružnice kroz tu točku slikaju pa možemo dosta toga zaključiti.
- Inverzija je jako povezana sa potencijom točke jer se pojavljuju izrazi oblika $OT \cdot OT'$. Npr, ako su A, B bilo koje točke tada su A, B, A', B' konciklične jer je $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$.

Veza između inverzije i harmoniteta su polare:

Pol i polara Neka je k kružnica sa radijusom r i središtem O. Za točku T, označimo sa T' sliku od T pri inverziji sa središtem u O i radijusom r. Neka je pravac p okomit na OT koji prolazi kroz T'. Tada kažemo da je p polara od T te da je T pol od p u odnosu na k.

Alternativno, točku T' možemo dobiti tako da uzmemo točke X, Y kao presjeke okomice u T na pravac OT i k. Tada se tangente u točkama X, Y na k sijeku u T' (pod uvjetom da je T unutar k, u protivnom jednostavno definiramo u drugom smjeru).



Polara p je slika kružnice promjera OT pri našoj inverziji zato što znamo da se ta kružnica slika u pravac koji sadrži točku T' i okomit je na pravac OT jer inverzija čuva kuteve.

Neka neki pravac kroz T siječe k u X, Y. Tada se polovište od XY nalazi na kružnici promjera OT pa se ono slika na p. Tada se i tangente na k u točkama X, Y sijeku na p.

Stoga polaru možemo promatrati kao lokus sjecišta tih tangenti za proizvoljni pravac kroz T.

Lema 4. Točka A je na polari od B ako i samo ako je B na polari od A.

Dokaz. A je na polari od $B \iff A'$ je na kružnici promjera $OB \iff \angle BA'O = 90° \iff \angle BA'A = 90° \iff \angle BB'A = 90° \iff \angle OB'A = 90° \iff B'$ je na kružnici promjera $OA \iff B$ na polari od A □

Zadatak 7. Dokažite da su polare od tri kolinearne točke konkurentne i da su polovi od tri konkurentne polare kolinearni.

Dokaz. Neka je S sjecište dvije polare. Koristeći lemu 4 imamo da je pravac kroz polove polara od S. Za drugi smjer, primijetimo da sva tri pola moraju ležati na polari od točke u kojoj se izvorne polare sijeku. □

5 Harmoniteti

I konačno dolazimo do centralne teme. Sve što ste dosada pročitali služi da biste dobili bolji osjećaj što se zbiva i da bi vam bilo lakše prepoznavati i koristiti leme koje slijede. U nastavku podrazumijevamo da se nalazimo u projektivnoj ravnini, tj. ako kažemo da se pravci sijeku, to ne znači da nisu paralelni!

Pramen je četvorka pravaca koji prolaze kroz jednu točku.

Harmonijsku četvorku čine 4 kolinearne točke A, B, C, D takve da je

$$\frac{AB}{AD} \cdot \frac{CD}{CB} = (A, C, B, D) = -1$$

pri čemu su dužine usmjerene. Kažemo da su te točke u harmonitetu.

Harmonijski pramen čine 4 pravca a, b, c, d koji prolaze kroz istu točku, tako da vrijedi

$$(a, c, b, d) = -1$$

Iako su harmoniteti definirani koristeći orijentirane dužine i kutove, u praksi koristimo neorijentirane dužine i kutove radi jednostavnosti, tj. da ne moramo paziti na predznak.

Iako je harmonijska četvorka definirana preko dvoomjera, rijetko kad ćete u zadacima dokazivati da neke točke čine harmonijsku četvorku preko dvoomjera. Uglavnom se to radi koristeći jednu od lema s kojima ćemo se uskoro upoznati. Te leme se naravno dokazuju raspisivanjem omjera. Shvatite to kao da su harmoniteti elegantni način da izbjegnete računanje. Jako je često 'elementarno' rješenje zadatka gotovo isto kao i dokaz tih lema za harmonitete.

Ako želite raspisivati omjere, razmislite jeste li iskoristili sve uvjete iz zadatka i ima li jednostavniji način. U protivnom, vjerojatno ćete zapeti u ružnom računu. Postoje iznimke naravno, ali budite jako oprezni ako želite računati dvoomjere!

Snaga harmoniteta je u tome što se pojavljuju u mnogo naizgled nepovezanih situacija. Puno tvrdnji je oblika 'znam da nešto vrijedi ako i samo ako ove su ove točke u harmonitetu'. Tada možemo dobiti različite tvrdnje iz činjenica koje već znamo koristeći harmonitete kao međukorak.

Otprije možemo zaključiti:

- Ako presiječemo pramen sa nekim pravcem, točke presjeka čine harmonijsku četvorku ako i samo ako je početni pramen harmonijski.
- Ako imamo harmonijsku četvorku A, B, C, D i kolinearne točke A', B', C', D' tako da se pravci AA', BB', CC', DD' sijeku u jednoj točki, tada je A', B', C', D' također harmonijska četvorka.
- Točke A, B, C, ∞ čine harmonijsku četvorku ako i samo ako je B polovište od AC.
- Ako su točke A, B, C, D, E na pravcu tako da su A, B, C, D i A, B, C, E harmonijske četvorke, onda je $D \equiv E$.

Iz toga možemo zaključiti sljedeću tvrdnju:

Lema 5. Imamo pramen a, b, c, d u točki T. Neka pravac p siječe a, b, c u A, B, C. Ako vrijede dvije od iduće tri tvrdnje, onda vrijedi i treća:

- Naš pramen je harmonijski.
- B je polovište dužine AC.
- d je paralelan sa p.

Lema 6. Dane su 4 kolinearne točke A, B, C, D u tome poretku te neka je M točka na pravcu $ABCD$. Ako vrijede dvije od iduće tri tvrdnje, onda vrijedi i treća:

- A, B, C, D je harmonijska četvorka.
- M je polovište dužine BD.
- Vrijedi $AB \cdot AD = AC \cdot AM$ <u>ili</u> $AM \cdot CM = BM^2$ <u>ili</u> $AM \cdot CM = DM^2$.

Dokaz. Pretpostavimo da je M polovište. Označimo li AB sa x, BC sa y i CD sa z, tvrdnja da je (A, B, C, D) harmonijska je ekvivalentna sa $zx = y(x + y + z)$.

$AB \cdot AD = AC \cdot AM$ je ekvivalentno sa $x(x+y+z) = (x+y)(x+\frac{y+z}{2})$, odnosno $xz = \frac{(x+y)(y+z)}{2}$, što je doista ekivivalentno sa $zx = y(x + y + z)$.

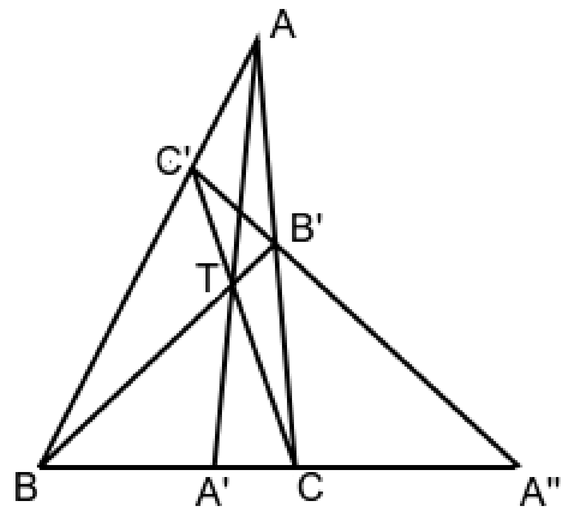
$AM \cdot CM = BM^2 = DM^2$ je ekvivalentno sa $(x + \frac{y+z}{2})\frac{z-y}{2} = \frac{(z+y)^2}{4}$, što kada se razmnoži, postane $y(x + y + z) = xz$.

Za drugi smjer, pretpostavimo da je (A, B, C, D) harmonijska četvorka i da vrijedi $AB \cdot AD = AC \cdot AM$ <u>ili</u> $AM \cdot CM = BM^2$ <u>ili</u> $AM \cdot CM = DM^2$. Označimo CM sa ϕ.

Tada je $AM \cdot CM = BM^2$ ekvivalentno sa $(x+y+\phi)\phi = (y+\phi)^2 \iff (x+y)\phi = y^2+2y\phi$, što je linearna jednadžba pa je ϕ jedinstveno određen. Analogno i za $AM \cdot CM = DM^2$. Za $AB \cdot AD = AC \cdot AM$, vidimo da je duljina AM jedinstveno određena.

Kako znamo da polovište od BD zadovoljava te relacije, a točka M je jedinstveno određena, zaključujemo da je M polovište od BD. □

Lema 6 je često korisna u kombinaciji sa potencijom točke, jer često koristeći potenciju točke dobivamo izraze kao što su $AB \cdot AD = AC \cdot AM$ ili $AM \cdot CM = BM^2$.



Lema 7. Dan je trokut ABC i točka T unutar trokuta. AT siječe pravac BC u točki A_1. Točke B' i C' definiramo analogno. Neka je A'' sjecište pravaca BC i $B'C'$ i pretpostavimo da je C između B i A''. Tada je A'', C, A', B harmonijska četvorka.

Dokaz. Cevin teorem za trokut ABC i točku T:

$$\frac{BA' \cdot CB' \cdot AC'}{A'C \cdot B'A \cdot C'B} = 1$$

Menelajev teorem za trokut ABC i pravac $B'C'$:

$$\frac{A''C \cdot B'A \cdot C'B}{BA'' \cdot CB' \cdot AC'} = 1$$

Množenjem tih dvaju jednakosti dobivamo:

$$\frac{A''C \cdot BA'}{BA'' \cdot A'C} = 1$$

tj. četvorka A'', C, A', B je harmonijska. □

Ova je lema najbolji izvor harmonijskih četvorki i pramenova. Koristi se gotovo uvijek kada koristimo harmonitete. Nije potrebno čak niti imati točku A'' na skici; možemo i bez nje dobiti da je pramen $C'B, C'A', C'C, C'B$ harmonijski.

Ako uočite na slici četverokute kojima se sijeku dijagonale ili nasuprotne stranice, to je dobra indikacija da bi vam harmoniteti mogli biti od koristi.

Zadatak 8. *(Desarguesov teorem)* Dan je trokut ABC i točke A_1, B_1, C_1 na stranicama BC, CA i AB redom. Neka je točka A_2 sjecište BC i B_1C_1. Analogno definiramo B_2 i C_2. Tada vrijedi da se AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki T ako i samo ako su A_2, B_2 i C_2 kolinearne točke.

Dokaz. Neka je A_2' sjecište B_2C_2 i BC. Želimo dokazati da je $A_2 \equiv A_2'$.

Iz leme 7 imamo da je $(A_2, A_1, C, B) = -1$ i $(C_2, C_1, A, B) = -1$.

Primijenimo li lemu 1 na pravce $B_2C_2, B_2A, B_2C_1, B_2B$ dobivamo da je $(A_2', A_1, C, B) = (C_2, C_1, A, B) = -1 = (A_2, A_1, C, B)$ pa je nužno $A_2 \equiv A_2'$ kao što smo i htjeli. □

Dokaz 2. Jedna stvar koja karakterizira ovaj zadatak je da imamo mnogo pravaca, a malo kružnica. Kao što smo već spomenuli, projektivne transformacije jako dobro funkcioniraju s pravcima.

Mogli biste osjetiti potrebu primijeniti afinu transformaciju s obzirom da cijeli zadatak dolazi u trojkama analognih točaka. Međutim, koliko god će to možda poljepšati sliku, u ovom slučaju bi vam samo smetalo s obzirom da vam ta transformacija nije dovoljna, a uvodi vam neke dodatne uvjete. Valja paziti isplati li se primjenjivati neku transformaciju.

Ovdje možete preslikati četverokut ABA_1B_1 u kvadrat i zadatak je praktički riješen.

Točka C' je točka u beskonačnosti pravaca $A'B_1'$ i $B'A_1'$, točka C_2' je točka u beskonačnosti pravaca $A'B'$ i $A_1'B_1'$, a točka C_1' se nalazi negdje na pravcu $A'B'$. Točke A_2, B_2, C_2 su kolinearne ako i samo ako su A_2', B_2', C_2' kolinearne, odnosno ako je $A_2'B_2'$ paralelan sa AB. Lako se dokaže da je to ekvivalentno sa tvrdnjom da je C_1' polovište $A'B'$. Sada za T', sjecište $A'A_1'$ i $B'B_1'$ vrijedi da je $T'C_1' \,||\, AB_1'$, odnosno T', C_1, C su kolinearni što je ekvivalentno s tvrdnjom da su AA_1, BB_1, CC_1 konkurentni, kao što smo htjeli. □

Lema 8. Dane su 4 točke A, B, C, D u tom poretku na pravcu te točka O koja nije na tom pravcu. Ako vrijede dvije od iduće tri tvrdnje, onda vrijedi i treća:

- A, B, C, D je harmonijska četvorka.
- OB je simetrala (unutarnjeg) kuta $\angle AOC$.
- OB i OD su okomiti.

Dokaz. Povucimo paralelu sa OA kroz B koja siječe OC, OD u C', D'. OA, OB, OC, OD je harmonijski pramen ako i samo ako je C' polovište BD' jer je OA paralelno sa BD'. Također, imamo da je OB je simetrala (unutarnjeg) kuta $\angle AOC$ ako i samo ako je $\angle C'OB = \angle BOA = \angle OBC'$, odnosno $OC' = BC'$.

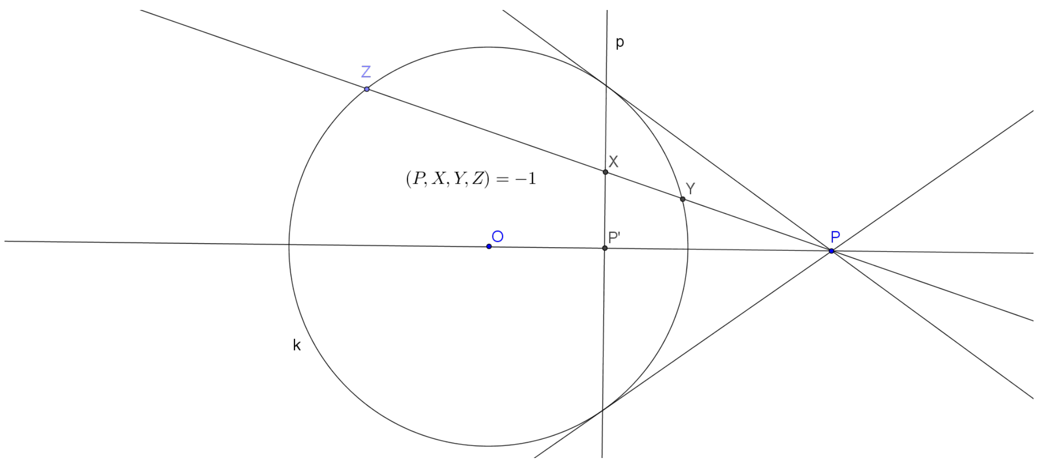
Ako ne znamo da je A, B, C, D harmonijska četvorka, onda iz $OC' = BC'$. $\angle BOD' = 90°$ imamo da je C' polovište BD'. Ako ne znamo da su OB i OD okomiti, iz $OC' = BC'$ i $D'C' = BC'$ imamo da je O točka na kružnici promjera BD'. Ako ne znamo da je OB je simetrala (unutarnjeg) kuta $\angle AOC$, iz toga da je $\angle BOD' = 90°$ i da je C' polovište BD' imamo $OC' = BC'$.

Ova se lema može dokazati i korištenjem trigonometrije ili raspisivanjem omjera stranica koristeći da vanjska i unutarnja simetrala dijele nasuprotnu stranicu u omjeru preostale dvije. □

Zadatak 9. Dan je konveksan četverokut $ABCD$. Neka je E sjecište AC i BD te F sjecište AD i BC. Nadalje, neka je T sjecište EF i AB. Ako se kružnica sa promjerom EF i pravac CD sijeku u dvije točke X, Y, dokažite da je EF simetrala kuta XPY.

Rješenje. Neka je Z presjek EF i CD. Neka BZ siječe AC i AD u točkama K i L. Primijenimo li lemu 7 na trokut CDF i točku E dobivamo da je L, Z, K, B harmonijska četvorka. Pramen iz A nam daje da je F, Z, E, T isto harmonijska četvorka pa budući da je kut EXF pravi (EF je promjer kružnice opisane oko F, Y, E, X), zbog leme 8 imamo da je XE simetrala $\angle TXZ$. Analogno je YE simetrala $\angle TYZ$ pa je E središte upisane kružnice trokuta XYT pa zaključak slijedi. $\square$

Bitne stvari za primijetiti u ovom rješenju su činjenica da točka T u lemi 7 ne mora biti unutar trokuta te tvrdnja da je F, Z, E, T harmonijska četvorka. Ta se tvrdnja isto često pojavljuje.



Lema 9. (*Pol i polara*) Neka su P točka i k kružnica. Točka X je na polari od P s obzirom na k ako i samo ako je Y, P, Z, X harmonijska četvorka, gdje su Y, Z sjecišta pravca PX sa k.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, neka se P nalazi izvan k, inače primjenom leme 4 svodimo na taj slučaj (zamijenimo P i X). Neka je O središte k te neka su A, B sjecišta pravca OP sa k. Neka je P' sjecište polare i pravca OP. Neka je O' polovište od YZ. Neka je X' sjecište polare i pravca PX.

Iz definicije polare imamo $OP \cdot OP' = OB^2$ pa jer je O polovište AB, iz leme (6) imamo da je P, B, P', A harmonijska četvorka pa opet iz te leme imamo da $PB \cdot PA = PP' \cdot PO$.

Iz potencije točke imamo $PB \cdot PA = PZ \cdot PY$ i $PX' \cdot PO' = PP' \cdot PO$ zato jer je četverokut $OP'X'O'$ tetivan (jer ima dva nasuprotna prava kuta).

Stoga imamo $PZ \cdot PY = PX' \cdot PO'$. Možemo zaključiti opet koristeći lemu 6 da je $X \equiv X'$, tj. X je na polari od P ako i samo ako je Y, P, Z, X harmonijska četvorka. $\square$

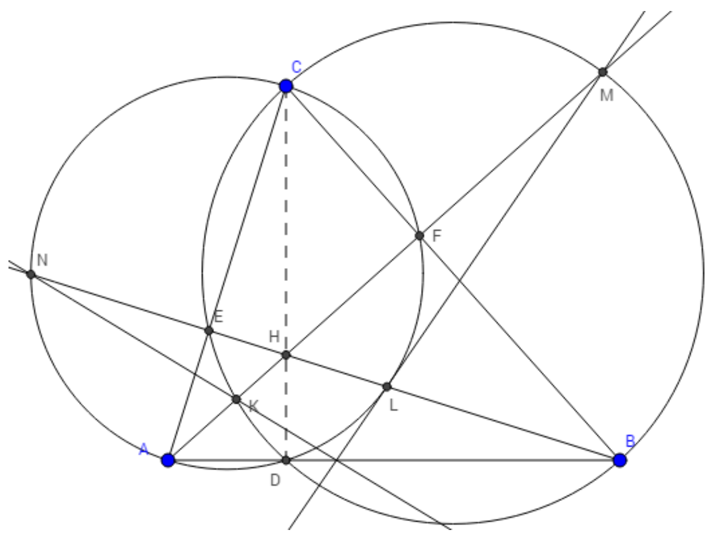
Napomena: Ova se lema može dokazati koristeći Pascalov teorem sa kontrahiranim točkama.

Zadatak 10. *(Brocardov teorem)* Dan je četverokut $ABCD$ upisan u kružnicu k. Definirajmo $X \equiv AB \cap CD$, $Y \equiv AC \cap BD$ i $Z \equiv AD \cap BC$. Tada je trokut XYZ autopolaran u odnosu na k. (*Trokut XYZ je autopolaran u odnosu na k ako je XY polara od Z, YZ polara od X te XZ polara od Y.*)

Rješenje. Neka su P, Q sjecišta YZ sa AB i CD redom. Sada iz leme 7 i pramena iz Z slijedi da su X, A, P, B i X, D, Q, C harmonijske četvorke. Stoga P i Q pripadaju polari od X, odnosno polara od X je pravac PQ koji se podudara sa pravcem YZ. Analogno slijedi i da je XY polara od Z, a da je Y pol od XZ slijedi iz leme 4. Štoviše, ako je O središte k, tada iz ovoga možemo zaključiti da je O ortocentar trokuta XYZ. □

Ovaj teorem zna biti koristan i dobro ga je imati na umu. Sljedeći bi zadatak trebao ilustrirati način na koji se koristi:

Zadatak 11. Neka je ABC šiljastokutan trokut. Kružnica ω_1 sa promjerom AC, siječe BC u C i F. Kružnica ω_2 s promjerom BC, siječe AC u C i E. Polupravac AF presijeca ω_2 u K i M tako da je $AK < AM$. Polupravac BE presijeca ω_1 u L i N tako da je $BL < BN$. Dokažite da se pravci AB, ML, NK sijeku u jednoj točki.



Rješenje. Neka je H ortocentar trokuta ABC te D nožište visine iz C. D se nalazi i na ω_1 i na ω_2 iz obrata Talesovog teorema. To implicira da je H na radikalnoj osi ω_1 i ω_2, odnosno vrijedi $LH \cdot HN = CH \cdot HD = KH \cdot HM$. To sada iz obrata potencije točke implicira da je $KLMN$ je tetivan. Neka je ω opisana kružnica od $KLMN$.

Možemo primijetiti iz istog razloga da vrijedi $KH \cdot HM = AH \cdot HF$. Isto tako, možemo primijetiti da je F polovište KM, s obzirom da je $AF \perp BC$ te da je BC promjer kružnice na kojoj su M i K. Sada nam lema 6 daje da su A, K, H, M u harmonitetu (zapravo rotacija dvoomjera i lema 6, zbog poretka). To implicira da je A na polari od H u odnosu na ω. Analogno dobivamo da je B na polari od H. Dakle, AB je polara od H u odnosu na ω.

Koristeći Brocardov teorem, H i $NK \cap LM$ su autopolarne u odnosu na ω, odnosno $NK \cap LM$ leži na polari od H, odnosno na AB, kao što smo i htjeli pokazati. □

U četverokutu $ABCD$, pravac kroz polovišta dijagonala se zove *Newtonov pravac*. Na njemu se još nalazi i sjecište spojnica dijagonala nasuprotnih stranica.

Zadatak 12. *(Newtonov teorem)* Dan je četverokut $ABCD$ u koji je upisana kružnica k sa središtem I. Neka mu je dirališni četverokut $XYZT$, gdje je X na AB, Y na BC, Z na CD i T na AD. Dokažite:

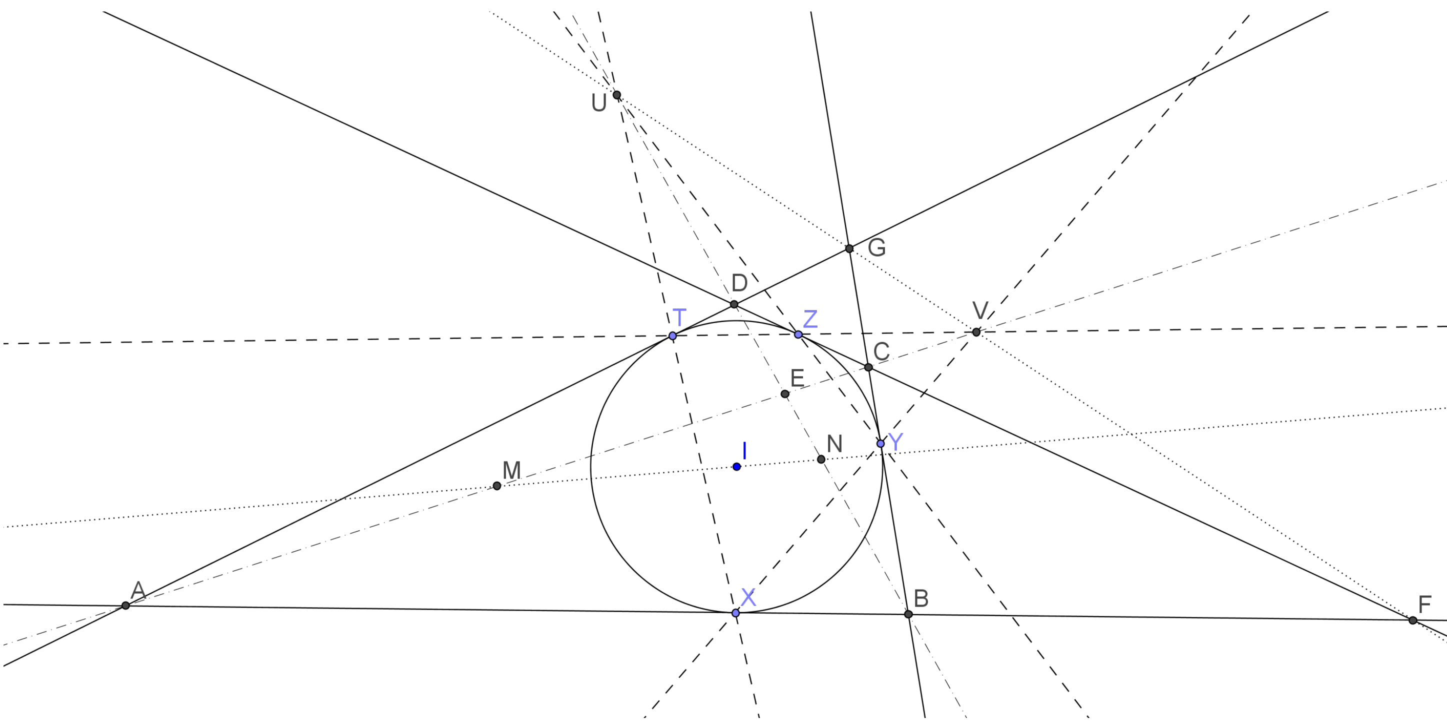
- Dijagonale od $ABCD$ i $XYZT$ se sijeku u istoj točki.
- Pravci AC, XY, TZ se sijeku u istoj točki. Analogno i za BD, YZ, XT.
- I leži da Newtonovom pravcu četverokuta $ABCD$ (ova se tvrdnja zove Newtonov teorem).

Rješenje. Neka su $U \equiv XT \cap YZ$ i $V \equiv XY \cap ZT$. Neka je E sjecište dijagonala $XYZT$. Tada iz Brocardova teorema slijedi da je UEV autopolaran u odnosu na k. Međutim, A je pol od XT pa je U na polari od A pa iz leme 2 je A na polari od U. Analogno je C na polari od U. Dakle, AC je polara od U, odnosno AC se podudara sa EV. Dakle, E leži na AC. Analogno, E leži na BD pa je E sjecište dijagonala četverokuta $ABCD$.

Za dokaz drugog dijela, razmislite o sljedećem teoremu. Dokaz ide praktično na isti način.

Teorem Leon-Anne Za bilo koji četverokut $ABCD$ koji nije paralelogram, geometrijsko mjesto točaka O takvih da vrijedi $P(AOB) + P(COD) = P(BOC) + P(AOD)$ je Newtonov pravac četverokuta $ABCD$. ($P(XYZ)$ *označava površinu trokuta* XYZ.)

Dokaz se nalazi na linku 5. □



Harmonijski četverokuti

Harmonijski su četverokuti jako bitni jer povezuju harmonitete sa kružnicama. Oni su korisni jer postoji mnogo različitih ekvivalentnih tvrdnji iz kojih možemo zaključiti da je neki četverokut harmonijski.

Definicija Tetivni četverokut $ABCD$ je *harmonijski* ako vrijedi da je umnožak nasuprotnih stranica jednak.

Definicija *Simedijana* u trokutu je osnosimetrična slika težišnice u odnosu na simetralu unutarnjeg kuta.

Lema 10. Za tetivni četverokut $ABCD$ sa opisanom kružnicom k, sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

1. $ABCD$ je harmonijski četverokut.
2. Za bilo koju točku P na k, pramen PA, PB, PC, PD je harmonijski (dozvoljeno je da se P podudara sa nekom od točaka A,B,C,D i u tom slučaju za pravac PP uzimamo tangentu na k u P).
3. Tangente na k u točkama A i C se sijeku na BD.
4. AC je simedijana u trokutu ABD.
5. Simetrale unutarnjih kutova DAB i BCD se sijeku na pravcu BD.

Napomena: Tvrdnje 3., 4. i 5. vrijede i kada ciklički permutiramo točke u izrazima.

Dokaz.

- (1. $\Leftrightarrow$ 2.) Koristeći lemu 3, dovoljno je dokazati tvrdnju za proizvoljnu točku P na kružnici. Neka je to, bez smanjenja općenitosti, točka P na luku AD koji ne sadrži B i C.

  Tada:
  $$(PA, PC, PB, PD) = \frac{\sin\angle(PA, PB)}{\sin\angle(PA, PD)}\frac{\sin\angle(PC, PD)}{\sin\angle(PC, PB)} = \frac{AB}{AD}\frac{CD}{CB}$$
  gdje zadnja jednakost vrijedi zbog sinusovog poučka. Odavde vidimo da je $(PA, PC, PB, PD) = -1$ ako i samo ako je četverokut $ABCD$ harmonijski.

- (1. $\Leftrightarrow$ 3.) Neka su T, T' redom sjecišta pravca BD i tangenti na k u C i A.

  Tada iz sličnosti trokuta TDC i TCB vrijedi $\frac{TD}{TC} = \frac{CD}{BC}$ i $TD \cdot TB = TC^2$ pa dobivamo
  $$\frac{TD}{TB} = \left(\frac{CD}{BC}\right)^2$$
  odnosno
  $$1 - \frac{BD}{TB} = \left(\frac{CD}{BC}\right)^2$$

Analogno dobivamo i

$$1-\frac{BD}{T'B}=\left(\frac{AD}{BA}\right)^2$$

Stoga je $T\equiv T'$ ako i samo ako $\frac{AD}{BA}=\frac{CD}{BC}$, kao što smo i htjeli.

Alternativno smo mogli dokazati da je 2. $\leftrightarrow$ 3. koristeći lemu 9 i pramenove CC, CD, CA, CB te AA, AB, AC, AD.

- (1. $\Leftrightarrow$ 4.) Neka je M polovište dijegonale BD. Tada iz definicije simedijane dobivamo da je AC simedijana ako i samo ako vrijedi $\angle DAC=\angle MAB$, a iz jednakosti obodnih kutova dobivamo $\angle MBA=\angle DCA$. Stoga je AC simedijana ako i samo ako su trokuti ADC i AMB slični. Koristeći ponovno $\angle MBA=\angle DCA$ dobivamo da su trokuti ADC i AMB slični ako i samo ako vrijedi:

  $$\frac{AB}{BM}=\frac{AC}{CD}$$

  što je ekvivalentno sa $AC\cdot BD=2AB\cdot CD$. Kako iz Ptolomejevog teorema imamo $AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$, dobivamo da je to ekvivalentno sa $AB\cdot CD=BC\cdot AD$ kao što smo i htjeli.

- (2. $\Leftrightarrow$ 5.) Neka su T, T' sjecišta simetrala kutova DAB i BCD sa pravcem BD redom.

  Tada je:

  $$\frac{BT}{DT}=\frac{AB}{AD}\qquad\qquad \frac{BT'}{DT'}=\frac{CB}{CD}$$

  Također, $T\equiv T'$ ako i samo ako je:

  $$\frac{BT}{DT}=\frac{BT'}{DT'}$$

  pa je $ABCD$ harmonijski ako i samo ako je $T\equiv T'$.

$\square$

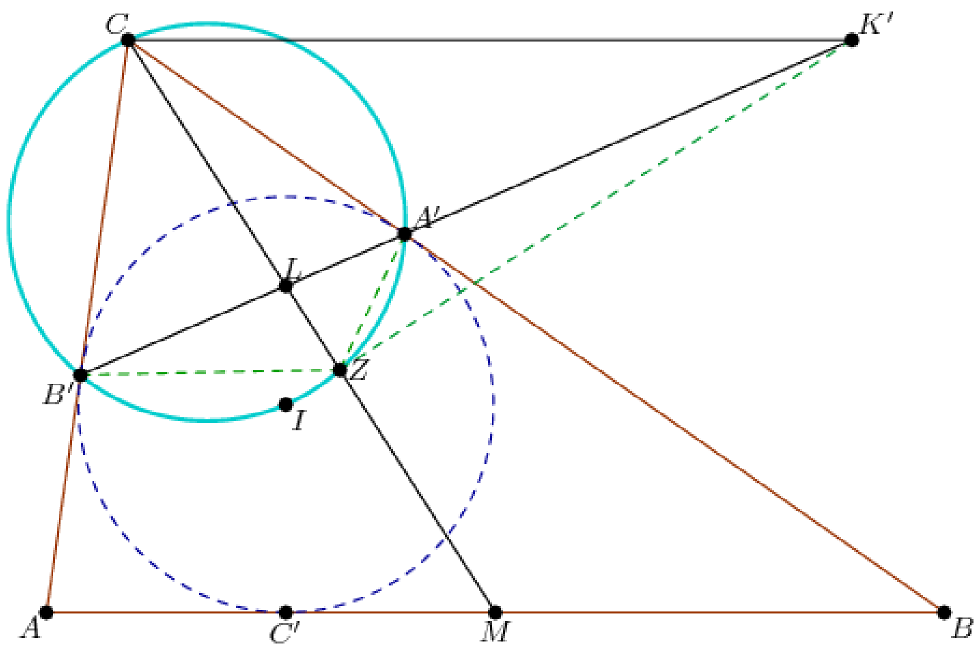
Zadatak 13. Dan je trokut ABC kojemu upisana kružnica dodiruje stranice BC, CA, AB u točkama A', B', C'. Neka je M polovište stranice AB, I središte upisane kružnice te K sjecište okomice iz I na CM i pravca $A'B'$. Dokažite da je $CK\,||\,AB$.

Rješenje. Neka je K' sjecište paralele sa AB kroz C i $A'B'$. Pramen CA, CM, CB, CK' je harmonijski jer je M polovište AB te vrijedi $CK'\,||\,AB$. Iz leme 1 znamo da je četvorka B', L, A', K' harmonijska, pri čemu je L sjecište CM i $A'B'$.

Iz leme (9) dobivamo da je L na polari od K' u odnosu na upisanu kružnicu, a budući da je C pol od $A'B'$, nužno je i C na polari od K' zbog leme 4.

Dakle, CL je polara od K' pa je $K'I$ okomito na CM, odnosno $K'\equiv K$, kao što smo i htjeli.

Napomena Postoji rješenje koje koristi harmonijske četverokute. $\square$



Zadatak 14. Neka je $ABCD$ četverokut upisan u kružnicu k sa središtem u O. M je sjecište dijagonala u $ABCD$, a P je sjecište okomice u M na OM i pravca BC. Neka je S sjecište DP i k te neka je Q drugo sjecište okomice iz D na OM i k. Dokažite da su A, S, sjecište tangenti na k u B i Q i sjecište simetrala kutova AQS i ABS kolinearni.

Rješenje. Najbitnije je se u ovom zadatku riješiti nebitnih stvari. Prvo, htjeli bismo da četverokut $AQSB$ harmonijski budući da onda tvrdnja slijedi iz leme 10. Preostaje nam dokazati da je $AQSB$ harmonijski.

Na kružnici $AQSB$ se nalaze još i točke D i C tako da bi htjeli iskoristiti lemu 10 (2. tvrdnja). Budući da nemamo nikakvu direktnu vezu između C,Q i S, dok za D imamo vezu sa svim točkama, logičnije je promatrati pramen iz D.

Sada je pitanje kojim pravcem presjeći pramen DA, DQ, DS, DB. Postoje dvije razumne opcije: PM i BC i obje vode do rješenja, ali je PM elegantnija.

Želimo da je DA, DQ, DS, DB harmonijski pramen što je ekvivalentno sa tvrdnjom da je DK, DQ, DP, DM harmonijski pramen, gdje je K sjecište AD i PM. S obzirom da je $DQ \,||\, KP$, pramen DK, DQ, DP, DM je harmonijski ako i samo ako je M polovište KP.

To se može dokazati na nekoliko načina. Najelegantniji je uz pomoć teorema o leptiru za četverokut $ADCB$ koji nam direktno daje $KM = MP$. □

Zadatak 15. Neka je ABC šiljastokutan trokut sa opisanom kružnicom k. Neka su B_0 i C_0 polovišta stranica AC i AB redom. D je nožište visine iz A i G je težište trokuta. Neka je X dirалište kružnice kroz B_0 i C_0 koja dodiruje k takva da je $X \neq A$. Dokažite da su točke D, G, X kolinearne.

Rješenje. U ovom zadatku se neizravno sugerira da X može biti jednak A, stoga je logičan prvi korak nacrtati kružnicu kroz A, B_0 i C_0. Iz homotetije s centrom u A i koeficijentom 2 vidimo da se ta kružnica slika u k pa onda i dodiruje k.

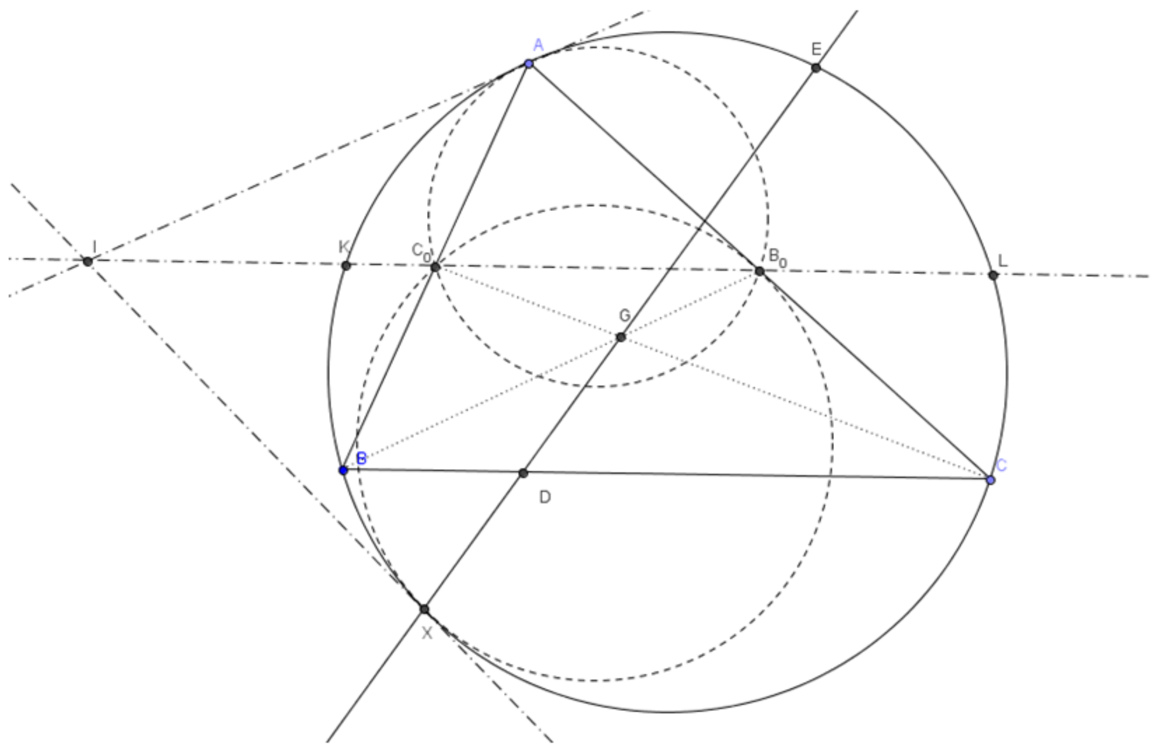
Na slici su tri kružnice pa je logičan idući korak promotriti radikalno središte tih triju kružnica. Radikalne osi su tangente na k u A i X te pravac B_0C_0 i oni se sijeku u jednoj točki.

Iz leme 10(3. tvrdnja) možemo zaključiti da je $AKXL$ harmonijski, gdje su K i L sjecišta B_0C_0 i k. Neka je $E \neq X$ presjek k i DG.

Sada želimo dokazati da je pramen EA, EK, ED, EL harmonijski jer time dobivamo da se X nalazi na ED.

Dokažimo da je AE paralelno sa BC. Neka je točka $E' \neq A$ presjek paralele sa BC kroz A i k. Neka je M polovište BC. Tada je $AG = 2GM$ i $\angle E'AG = \angle GMD$. Zbog simetrije u odnosu na simetralu stranice BC imamo $AE' = 2DM$. Stoga su trokuti $E'AG$ i DGM slični pa zaključujemo da su D, G, E' kolinearne, odnosno $E' \equiv E$.

Sada imamo da je polovište P dužine DE na simetrali stranice BC te na B_0C_0 odnosno KL. Budući da je KL paralelan sa BC, dobivamo da je P polovište KL pa iz leme 5 slijedi da je pramen EA, EK, ED, EL doista harmonijski kao što smo i htjeli. □



Još jedno mjesto gdje se pojavljuje harmonijska četvorka:

Lema 11. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice sa središtima u O_1 i O_2. Neka je X sjecište unutrašnjih zajedničkih tangenata, a Y vanjskih. Tada je O_1, X, O_2, Y harmonijska četvorka.

Dokaz. Pretpostavimo da su točke O_1, X, O_2, Y u tom poretku. X i Y su središta homotetija koje slikaju jednu kružnicu u drugu pa imamo:

$$\frac{O_1X}{XO_2} \cdot \frac{O_2Y}{O_1Y} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_1} = 1$$

gdje su r_1, r_2 radijusi k_1 i k_2. □

Zadatak 16. Za dani tetivni četverokut $ABCD$, neka je M polovište stranice CD. Neka je E je presjek AC i BD, F presjek BC i DA te N proizvoljna točka na opisanoj kružnici trokuta ABM. Ako je N različit od M i zadovoljava $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$, dokažite da su E, F, N kolinearne.

Rješenje. Ovo je težak zadatak koji postane prilično lagan sa harmonitetima. Na harmonitete bi nas trebala navesti činjenica da je $ANBM$ harmonijski četverokut.

Za ovaj je zadatak bitno imati dobru skicu. Ako imamo dobru skicu, lako možemo naslutiti da se CD, EF i opisana kružnica trokuta ABM sijeku u istoj točki. Osim toga, znamo da će pravac EF sjeći opisanu kružnicu trokuta ABM u N pa možemo naslutiti da će nam i drugo sjecište biti korisno.

Neka su $G \equiv AB \cap CD$, $K \equiv EF \cap CD$. Sada iz leme 7 znamo da je C, K, D, G harmonijska četvorka pa iz leme 6 imamo $GC \cdot GD = GM \cdot GK$. Iz potencije točke imamo $GC \cdot GD = GA \cdot GB$. Stoga $GA \cdot GB = GM \cdot GK$, tj. $ABMK$ je tetivan četverokut.

Sada imamo da je KC, KB, KF, KA harmonijski pramen pa je presjek tog pramena sa opisanom kružnicom harmonijski četverokut. Stoga je N na pravcu EF, kao što smo i htjeli. □

Zadatak 17. Dana je točka P unutar trokuta ABC. Pravci AP, BP, CP sijeku BC, AC, AB u E, F, D redom. Simetrale kutova $\angle ADC$ i $\angle AFB$ se sijeku u K, simetrale kutova $\angle BDC$ i $\angle AEB$ se sijeku u I i simetrale kutova $\angle AEC$ i $\angle CFB$ se sijeku u J. Dokažite da se pravci CJ, BI, AK sijeku u jednoj točki.

Rješenje. Na prvi pogled, ovaj zadatak izgleda težak. Na slici imamo mnogo relativno nepovezanih harmonijskih pramenova (zbog leme 8) i ne znamo odmah što činiti.

Simetrale kuteva se čine relativno nasumične i razumno je očekivati da će tvrdnja zadatka vrijediti i ako samo imamo da su nam odgovarajući pramenovi harmonijski. U zadatku imamo mnogo sjecišta i harmonijskih pramenova pa bi mogli naslutiti da bi nam projektivne transformacije mogle biti od koristi.

Promotrimo projektivnu transformaciju Π koja slika trokut ABC u jednakostranični trokut, a točku P u njegov centar. Neka $X' = \Pi(X)$ označava sliku od X pri toj transformaciji.

Jer je DA, DK, DP, DI harmonijski pramen, $D'A', D'K', D'P', D'I'$ je i dalje harmonijski pramen jer Π čuva dvoomjere prema lemi 2. Sada imamo da je $P'D'$ okomit na $A'B'$ po definiciji od Π pa iz leme 8 imamo da je $P'D'$ simetrala $\angle K'D'I'$. Analogno je $P'E'$ simetrala $\angle I'E'J'$ te $P'F'$ simetrala $\angle J'F'K'$.

Označimo sa $x = \angle K'D'F' = \angle I'D'E'$ sa $y = \angle I'E'D' = \angle J'E'F'$ i $z = \angle J'F'E' = \angle K'F'D'$ te primijetimo da su trokuti $A'B'C'$, $D'B'E'$, $E'C'F'$, $F'A'D'$ jednakostranični. Iz Cevinog teorema za sinuse primijenjenog na trokut $A'D'F'$ imamo:

$$\frac{\sin(\angle P'A'D')}{\sin(\angle P'A'F')} = \frac{\sin(x)}{\sin(60^\circ - x)} \frac{\sin(60^\circ - y)}{\sin(y)}$$

Analogne se jednakosti dobivaju za $\frac{\sin(\angle P'B'E')}{\sin(\angle P'B'D')}$ i $\frac{\sin(\angle P'C'F')}{\sin(\angle P'C'E')}$ te množenjem tih triju jednakosti dobivamo:

$$\frac{\sin(\angle P'A'D')}{\sin(\angle P'A'F')} \frac{\sin(\angle P'B'E')}{\sin(\angle P'B'D')} \frac{\sin(\angle P'C'F')}{\sin(\angle P'C'E')} = 1$$

pa po Cevinom teoremu za sinuse vrijedi da se $A'K', B'I', C'J'$ sijeku u jednoj točki. Stoga se i AK, BI, CJ sijeku u jednoj točki. $\square$

6 Zadaci za vježbu

Napomena: Rješenja zadataka nisu potpuna. Jako često samo se kaže da neka tvrdnja vrijedi. U tim je slučajevima to ili relativno očito ili je lagano za dokazati koristeći neke od lema odozgo. Poredak zadataka korelira sa težinom, iako je to određeno sasvim subjektivno. Neka rješenja nedostaju. Nadam se da će biti dodana u novijim verzijama ove skripte zajedno sa još zadataka.

Zadatak 18. (Apolonijeva kružnica) Dane su točke A i B i pozitivan broj k. Odredi lokus točaka T takvih da je $\frac{AT}{BT} = k$

Rješenje: Neka su C i D na pravcu AB takve da $\frac{AC}{BC} = k$ i $\frac{AD}{BD} = k$ i da je C između A i B. Bez smanjenja općenitosti, neka je B između C i D. Tada je A, C, B, D harmonijska četvorka. Nacrtajmo kružnicu promjera CD. Ako je točka T na toj kružnici, imamo da je TC simetrala kuta $\angle ATB$ pa je $\frac{AT}{BT} = \frac{AC}{BC} = k$. Lako se pokaže da su to jedine takve točke. $\square$

Zadatak 19. Neka su E i F sjecišta nasuprotnih strana četverokuta $ABCD$, P presjek njegovih dijagonala i O nožište okomice iz P na EF. Dokaži $\angle BOC = \angle AOD$.

Rješenje: Neka su $G = BD \cap EF, H = AC \cap EF$. G, D, P, B i H, C, P, A su harmonijske četvorke pa je OP simetrala kuteva AOC i BOD. $\square$

Zadatak 20. U $\triangle ABC$, D, E, F su dirališta upisane kružnice sa BC, AB, AC. Neka je X unutar trokuta tako da upisana kružnica $\triangle XBC$ dira BC u D. G, H su druga dva dirališta upisane kružnice od $\triangle XBC$. Dokaži da su E, F, G, H konciklične.

Rješenje: Neka su $K = EF \cap BC, K' = GH \cap BC$. K, C, D, B i K', C, D, B su u harmonitetu pa je $K = K'$. Potencija točke: $KE \cdot KF = KD^2 = KG \cdot KH$ pa su E, F, G, H konciklične. $\square$

Zadatak 21. Dana je točka D na pravcu BC u $\triangle ABC$ tako da je $AB = BD$ i B je između C i D. Neka je k kružnica promjera BC. Opisana kružnica $\triangle ABD$ siječe k u P, $BP \cap AC = E$, $CP \cap AB = F$. Dokaži da su E, F, D kolinearne.

Rješenje: Neka je $G = AP \cap BC$. $AB = BD \iff \angle BAD = \angle BDA \iff \angle GPB = \angle BPD \iff D, B, G, C$ u harmonitetu $\iff E, F, G$ kolinearne. $\square$

Zadatak 22. Neka su A_1,B_1,C_1 točke na odgovarajućim stranicama $\triangle ABC$ i neka se pravci AA_1, BB_1, CC_1 sijeku u jednoj točki. A_1B_1 i A_1C_1 sijeku paralelu kroz A sa BC u točkama B' i C'. Dokaži da je A polovište $B'C'$.

Rješenje: $A_1C_1, A_1A, A_1B_1, A_1C$ je harmonijski pramen pa jer je ta paralela paralelna sa BC, imamo da je A polovište $B'C'$. $\square$

Zadatak 23. Dana je točka P u $\triangle ABC$. $AP \cap BC = A_1$, B_1, C_1 su definirane analogno. $B_1C_1 \cap BC = A_2$, B_2, C_2 su definirane analogno. Dokaži da su A_2, B_2, C_2 kolinearne.

Rješenje: Neka su $X = BB_1 \cap A_2B_2$, $Y = AB \cap A_2B_2, B2$, $Y' = A_1B_1 \cap A_2B_2$. Tada imamo da su pramenovi BA_2, BX, BY, BB_2 i $A_1A_2, A_1X, A_1Y, A_1B_2$ harmonijski pa zato vrijedi da su i A_2, X, Y, B_2 te A_2, X, Y, B_2 u harmonitetu pa je $Y = Y'$ $\square$

Zadatak 24. Neka je k kružnica kroz točke A,B trokuta ABC i neka k siječe AC i BC u D i E redom. Neka je M polovište $\overline{AB}$ i neka je N točka na $\overline{AB}$ tako da se CN, BD i AE sijeku u jednoj točki. Dokaži da točke M, N, D i E leže na istoj kružnici.

Rješenje: Neka je $F = DE \cap AB$. Tada su A, N, B, F u harmonitetu. Jer je M polovište, imamo $FB \cdot FA = FN \cdot FM$. Iz potencije točke imamo da je $FB \cdot FA = FE \cdot FD$ pa vrijedi $FD \cdot FE = FN \cdot FM$ pa su M, N, E, D konciklične. $\square$

Zadatak 25. U $\triangle ABC$, D, E, F su dirališta upisane kružnice sa BC, AB, AC. T je presjek DE i BC, a M je polovište TF. MP je tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC. Dokaži da je $MP = MT$.

Rješenje: A, F, B, T su u harmonitetu pa je $MB \cdot MA = MT^2$. Iz potencije točke imamo $MP^2 = MB \cdot MA$ pa je $MP = MT$. $\square$

Zadatak 26. U šiljastokutnom trokutu ABC, točke D i E su na stranicama AC i AB tako da $\angle ADE = \angle ABC$. Simetrala kuta $\angle BAC$ siječe BC u K. P i L su nožišta okomica iz K i A na DE, a Q je polovište AL. Ako središte upisane kružnice $\triangle ABC$ leži na opisanoj kružnici $\triangle ADE$, Dokaži da središte upisane kružnice trokuta $\triangle ADE$ leži na pravcu PQ.

Zadatak 27. U tangencijalnom četverokutu $ABCD$, pravci AB i CD se sijeku u E, a BC i DA se sijeku u F. Imamo da je A između B i E, C između B i F i D je bliže pravcu EF od B. k_1 i k_2 su upisane kružnice $\triangle AED$ i $\triangle CFD$. Okomica iz D na EF siječe EF u T. Dokaži da T vidi kružnice k_1 i k_2 pod istim kutom (kut izmedu tangenti iz T na kružnice je jednak).

Rješenje: Neka su I_1, I_2 središta kružnica upisanih u AED i CFD i r_1, r_2 njihovi radijusi i neka je $G = I_1I_2 \cap EF$. $I, AF \cap EI, I_1, E$ su u harmonitetu pa je FI, FA, FI_1, FE harmonijska četvorka. Stoga su I_1, D, I_2, G u harmonitetu pa jer je $\angle DTG = 90°$, imamo da je TD simetrala od $\angle I_1TI_2$ pa je $\frac{TI_1}{TI_2} = \frac{DI_1}{DI_2} = \frac{r_1}{r_1}$, gdje je zadnja jednakost zbog homotetije. Tada imamo da je $\frac{r_2}{TI_2} = \frac{r_1}{TI_1}$, a ta dva omjera su tangensi kutova pod kojim T vidi kružnice pa su ti kutovi jednaki. $\square$

Zadatak 28. $\triangle ABC$, $\angle A$ je pravi. Točka D je na stranici AC. E je osnosimetrična točka od A u odnosu na BD, a F je sjecište EC i okomice iz D na BC. Dokaži da se pravci AF, DE, BC sijeku u jednoj točki.

Rješenje: Neka je $M = AE \cap BC$, N nožište okomice iz D na BC, $H = AE \cap DF$. Jer je kut BAC pravi, imamo da su točke A, B, E, N, D konciklične. Tada iz obodnih kuteva dobivamo da je NB simetrala $\angle ANE$. Jer je NM okomito na DF, imamo da su A, M, E, H u harmonitetu. Tada se AF, DE, BC sijeku u jednoj točki. $\square$

Zadatak 29. U $\triangle ABC$, D je dirалište upisane kružnice sa stranicom AB. CD siječe upisanu kružnicu u X. Neka je T točka na dužini CD tako da $AT = AD$. $AT \cap BX = S$. Dokaži $ST = TA$.

Rješenje: Neka su E, F dirališta upisane sa stranicama BC i CA, $G = EF \cap AB$. Četverokut $XEDF$ je harmonijski pa je GX tangenta na upisanu kružnicu $\triangle ABC$. Stoga je $GX = GD$ pa je GX paralelno sa AT. Također, G, A, D, B su u harmonitetu jer se CD, AE, BF sijeku u jednoj točki (Gergonneova točka). Zato je pramen XG, XA, XD, XB harmonijski pa je T polovište od AS. □

Zadatak 30. Četverokut $ABCD$ ima upisanu kružnicu k sa središtem u O. Neka su E i F presjeci pravca BD i k. Neka je H nožište okomice iz O na pravac AC. Dokaži $\angle BHE = \angle DHF$.

Rješenje: Neka su X, Y, Z, W dirališta upisane kružnice četverokuta $ABCD$ sa stranicama AB, BC, CD, DA redom. Neka se XW i YZ sijeku u G, WZ i XY sijeku u K i neka je S sjecište dijagonala četverokuta $ABCD$. Tada znamo da su B, D, G kolinearne, A, C, K kolinearne, $\triangle SKG$ autopolaran sa ortocentrom O (vidi Brocardov teorem i dokaz Newtonovog teorema).

Jer je AC polara od G, imamo da je četvorka E, S, F, G harmonijska. Iz istog razloga, $Z, AC \cap YZ, Y, G$ su u harmonitetu pa promatrajući pramen CZ, CS, CY, CG, zaključujemo da su D, S, B, G u harmonitetu. Također, O je ortocentar $\triangle SKG$ pa su O, H, G kolinearne. Stoga je OS simetrala kutova $\angle BOD$ i $\angle FOE$ iz čega imamo $\angle BHE = \angle DHF$. □

Zadatak 31. Kružnice w_1 i w_2 sa središtima O_1 i O_2 se dodiruju izvana u točki D te diraju iznutra kružnicu w u točkama E i F redom. Neka je t tangenta na w_1 u točki D. Neka je AB promjer od w okomit na t tako da su A, E, O_1 sa iste strane pravca t. Dokaži da pravci AO_1, BO_2, EF i t prolaze istom točkom.

Zadatak 32. Za dani trokut ABC neka su D, E, F nožišta visina iz A, B, C redom te neka su A', B', C' polovišta stranica BC, CA i AB redom. Neka su $X \equiv DE \cap A'B'$, $Y \equiv EC' \cap FB'$ te $Z \equiv DF \cap A'C'$. Dokaži da su točke A, X, Y, Z kolinearne.

Zadatak 33. Neka je ABC trokut sa upisanom kružnicom w i A-pripisanom kružnicom w'. Neka su A' i A'' dirališne točke w i w' sa stranicom BC redom. Definirajmo $P \equiv AA' \cap w$ te $P' \equiv AA" \cap w'$ i $M \equiv CP \cap w$, $N \equiv BP \cap w$, $M' \equiv CP' \cap w'$, $N' \equiv BP' \cap w'$ te neka je $X \equiv BM \cap CN$ te $X' \equiv BM' \cap CN'$. Dokaži da se pravci XX', PP', BC sijeku u jednoj točki.

Zadatak 34. Unutar trokuta ABC dana je točka P. Ako su $A'B'C'$ sjecišta pravaca kroz P i A, B, C te nasuprotnih stranica te neka je $A_1B_1C_1$ polovišni trokut trokuta ABC. $A_2 \equiv AP \cap B_1C_1$. Analogno definiramo B_2, C_2. Pretpostavimo da se A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sijeku u P' te da se paralele kroz A', B', C' sa AP', BP', CP' sijeku u P_1. Neka je $A_3B_3C_3$ pravac koji nastaje kao posljedica Desarguesovog teorema za dužine u trokutu $A'B'C'$ koje se sijeku u P'. Neka je $A_4 \equiv AA_3 \cap BC$. Analogno definiramo B_4, C_4. Dokaži da A_4, B_4, C_4 leže na pravcu paralelnom sa $A_3B_3C_3$.

7 Literatura i poveznice

Dodatni materijal 1: Tomislav Pejković: Afine i projektivne transformacije

Dodatni materijal 2: Mea Bombardelli: Inverzija

Poveznica 1: Projektivna geometrija

http://www.imomath.com/index.php?options=330

Poveznica 2: Leme harmonijskih četverokuta

http://www.artofproblemsolving.com/blog/47034

Poveznica 3: Pol, polara

http://www.math.uoc.gr/ pamfilos/eGallery/problems/Polar.html

Poveznica 4: Harmonijski četverokut

http://www.rapanos.co.uk/wp-content/uploads/2011/08/The-harmonic-quadrilateral-and-its-properties.pdf

Poveznica 5: Newtonov teorem

http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/NewtonTheorem.shtml

Poveznica 6: Tangencijalni četverokuti

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=70184

Poveznica 7: Potpuni četverokuti

http://www.rapanos.co.uk/wp-content/uploads/2011/08/The-complete-quadrilateral-and-its-properties.pdf

Poveznica 8: Harmoniteti općenito

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=161310