

MEMO pripreme 2016 – Dodatne konstrukcije

Matija Bašić

17. 6. 2016.

Kroz zadatke na ovom predavanju ćemo vidjeti neke vrlo klasične ideje koje se pojavljuju u rješavanju planimetrijskih zadataka.

- **Angle chasing.** Ovo je najpoznatija metoda u rješavanju planimetrijskih zadataka u kojima se pojavljuju tetivni četverokuti. Metoda se bazira na računanju kutova, te korištenju teorema o obodnom kutu, kutu tetive i tangente, uočavanju jednakokračnih trokuta i sličnim idejama.
- **Korištenje polovišta.** Ako se u zadatku pojavljuje polovište, razmišljajte možete li nacrtati/uočiti srednjicu kroz tu točku nekog trokuta, paralelogram kojem je ta točka sjecište dijagonala ili pravokutni trokut kojem je ta točka polovište hipotenuze.
- **Algebarski uvjeti.** Pojavljuje li se u zadatku neki algebarski uvjet, uvodimo novu točku na način da na jednom pravcu imamo dužine čije duljine su jednake onima koje se pojavljuju u izrazu. Na primjer, ako u trokutu ABC točka D leži na stranici \overline{AB} tako da vrijedi $|BC| = |AD| + |AC|$, nacrtat ćemo točku E na produžetku stranice \overline{AB} takvu da je $|AE| = |AC|$.
- **Konkurentnost.** Želite li pokazati da se krivulje (npr. pravci, kružnice) p , q i k sijeku u jednoj točki ili ako treba pokazati da se presjek krivulja p i q nalazi na krivulji k , promijenite perspektivu tako da uvedete presjek krivulja p i k te pokažete da leži na krivulji q .
- **Kolinearnost.** Želite li dokazati da točke A , B i C leže na jednom pravcu, uvedite točku D i pokažite da su A , B i D kolinearne, te A , C i D .
- **Fantomska točka.** U zadatku se pojavljuje točka T koja je definirana na jedan način. Potrebno je pokazati neka druga svojstva te točke, što nam nikako ne polazi za rukom na direktan način. Uvedemo točku T' koja ima svojstva koja želimo pokazati za točku T i pokažemo da točka T' zadovoljava svojstvo kojim je definirana točka T . Ako uvjeti na jedinstven način određuju točku T , možemo zaključiti da je točka $T = T'$, te smo time dokazali da točka T također ima svojstva koja ima i točka T' .
- **Poznate točke na opisanoj kružnici.** Na opisanoj kružnici trokuta nalaze se sjecište simetrale kuta i simetrale nasuprotne stranice, osnosimetrična slika ortocentra obzirom na stranicu, centralnosimetrična slika ortocentra obzirom na polovište stranice.
- **Simetrija.** Naučite koristiti simetriju u kombinaciji s fantomskom točkom. Uz osnu i centralnu simetriju, naučite koristiti rotaciju u dokazivanju sukladnosti.

Zadaci

1. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut i neka se pravci AB i CD sijeku u točki E . Točka F je centralno simetrična slika točke C obzirom na točku E . Dokaži da su pravci AF i BD okomiti ako i samo ako su pravci AB i CD okomiti.
2. U šiljastokutnom trokutu ABC , koji nije jednakostraničan, točka P je nožište visine iz vrha C . Neka je H ortocentar tog trokuta, a O središte opisane kružnice. Neka je D presjek pravaca CO i AB , a E polovište dužine CD . Dokaži da pravac EP prolazi kroz polovište dužine \overline{OH} .
3. Neka je H ortocentar trokuta ABC , a D polovište stranice BC . Pravac kroz H siječe stranice AB i AC u točkama F i E redom tako da je $AE = AF$. Polupravac DH siječe opisanu kružnicu trokutu ABC u točki P . Dokaži da točke P, A, E, F leže na jednoj kružnici.
4. Neka je I središte, a D, E, F redom dirališta upisane kružnice sa stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ u trokutu ABC . Neka je M nožište okomice iz točke D na pravac EF . Neka je P polovište dužine \overline{DM} , a H ortocentar trokuta BIC . Dokaži da pravac PH raspolavlja dužinu \overline{EF} .
5. U trokutu ABC vrijedi $|AB| > |BC|$, a točke M i N nalaze se redom na $\overline{AB}, \overline{BC}$, tako da je $|AM| = |CN|$. Pravci MN i AC sijeku se u K . Neka je P središte upisane kružnice trokuta AMK , Q središte pripisane kružnice trokuta CNK nasuprot vrha K . Dokaži da je polovište duljeg luka AC opisane kružnice trokuta ABC jednako udaljeno od točaka P i Q .
6. Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut takav da je $BC \parallel AE$, $|AB| = |BC| + |AE|$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDE$. Neka je M polovište dužine \overline{CD} i neka je O središte opisane kružnice trokutu BCD . Ako je $\sphericalangle DMO = 90^\circ$, dokaži da je $2\sphericalangle BDA = \sphericalangle CDE$.
7. Neka je O središte upisane kružnice, a H ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC . Dokaži da postoje točke D, E, F na stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ redom, tako da vrijedi

$$|OD| + |DH| = |OE| + |EH| = |OF| + |FH|$$

i da su pravci AD, BE i CF konkurentni.

8. Neka su Ω i O opisana kružnica i središte opisane kružnice šiljastokutnom trokutu ABC uz $|AB| > |BC|$. Simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe Ω u točki $M \neq B$. Neka je Γ kružnica s promjerom \overline{BM} . Simetrane kutova $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BOC$ sijeku Γ u točkama P i Q , redom. Točka R je odabrana na pravcu PQ tako da je $|BR| = |MR|$. Dokaži da je $BR \parallel AC$.