Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2018.

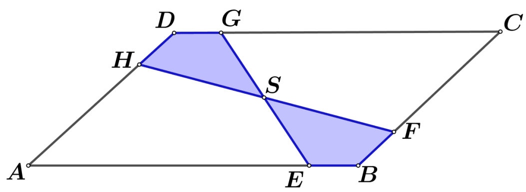
1. Odredite sve cijele brojeve a za koje je $4a^2 - 24a - 45$ prost broj.

2. Za koje je realne brojeve x vrijednost izraza

$$\frac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)-3}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+1}$$

veća od 1 ?

3. Duljine stranica paralelograma iznose $10\,\mathrm{cm}$ i $8\,\mathrm{cm}$. Izračunajte površinu osjenčanog dijela na slici ako je površina cijelog paralelograma $40\,\mathrm{cm}^2$ te vrijedi $|EB| = |BF| = |GD| = |DH| = 1\,\mathrm{cm}$.



4. Od svih prirodnih brojeva koji su djeljivi s 8 odredite one kojima je zbroj znamenaka jednak 7, a umnožak znamenaka jednak 6.

5. U pravokutnom je trokutu zbroj duljina težišnica povučenih iz vrhova na hipotenuzi jednak $5\sqrt{5}$, a umnožak 30. Kolika je duljina hipotenuze?

6. Borna i Dina pomogli su Ani oličiti sobu. Ako bi Ana ličila sama, trebalo bi joj 15 sati da oliči cijelu sobu. Borna radi 50% brže od Ane, a Dina 25% sporije. Ana je sama počela s ličenjem u 8 sati, a Borna joj se pridružio u 9 sati i 30 minuta. U trenutku kad je došla Dina ukupno je bilo oličeno 35% sobe. Nakon toga su svi zajedno ličili dok nisu oličili cijelu sobu. U koliko je sati soba bila oličena?

7. Kuhar je za 36 kolača koristio tri različite kreme: bijelu, žutu i crnu. 25 kolača ima dijelove s bijelom kremom, 28 kolača ima dijelove sa žutom kremom, a njih 20 s crnom kremom. Samo se u 5 kolača nalaze sve tri kreme. Koliko ima „jednobojnih" kolača (onih u kojima se nalazi samo jedna vrsta kreme), a koliko „dvobojnih" kolača?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2018.

1. Ako je $a = \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}+\sqrt{\sqrt{3}+1}\right)$, $b = \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}-\sqrt{\sqrt{3}+1}\right)$, koliko je $a+b$?

2. Neka su $z = x+2i$, $u = 3+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ kompleksni brojevi. Odredite sve uređene parove realnih brojeva (x, y) za koje je realni dio broja $\dfrac{z+u}{z-u}$ jednak nula, a točka s koordinatama (x, y) od ishodišta udaljena za 3.

3. Jednadžba $y = x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 2018$, $m \in \mathbb{R}$ određuje skup parabola. Kojemu skupu točaka pripadaju tjemena svih takvih parabola? Odredite zbroj koordinata one točke iz tog skupa koja je najbliža x-osi.

4. Dokažite da je u pravilnome 18-erokutu aritmetička sredina udaljenosti proizvoljne točke T od pravaca na kojima leže stranice toga 18-erokuta jednaka $R\cos 10^\circ$, gdje je R polumjer opisane kružnice toga 18-erokuta.

5. Petar ima komplet od 9 sportskih majica. Na svakoj je majici otisnut jedan od brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i svi brojevi na majicama su različiti. Petar ide na putovanje i želi ponijeti 5 majica tako da među njima budu barem tri na kojima je otisnut paran broj. Na koliko načina Petar može odabrati 5 majica koje će ponijeti na put?

6. Za koje cijele brojeve b izraz

$$\left(\frac{b}{b+8} - \frac{4b}{\left(b^{\frac{1}{3}}+2\right)^3}\right) \cdot \left(\frac{1+2b^{-\frac{1}{3}}}{1-2b^{-\frac{1}{3}}}\right)^2 + \frac{24}{b+8}$$

ima vrijednost veću od 1 ?

7. Jednakokračan trapez upisan je u polukrug polumjera 4 cm tako da mu je veća osnovica promjer. Koji od svih takvih trapeza ima maksimalan opseg? Obrazložite i odredite njegovu površinu.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2018.

1. Neka su x i y realni brojevi takvi da je

$$\sin x - \sin y = \sqrt{\frac{1008}{1009}}, \quad \cos x - \cos y = 1.$$

Čemu je jednako $\cos(x-y)$?

2. Odredite sve parne prirodne brojeve n za koje vrijedi

$$\left|\log_{0.5} 20^{\cos\pi} + \log_{0.5} 30^{\cos 2\pi} + \log_{0.5} 42^{\cos 3\pi} + \cdots + \log_{0.5}\left(n^2+7n+12\right)^{\cos n\pi}\right| = 1.$$

3. Riješite jednadžbu $x^2 - x - \sin(\pi x) = -1.25$.

4. Izračunajte površinu romba $ABCD$ ako su polumjeri opisanih kružnica trokuta ABD i ACD redom jednaki 10 i 20.

5. Marko se pokušava prisjetiti jedne od svojih lozinki. Zapamtio je da se radi o peteroznamenkastom broju s različitim znamenkama kojemu se prva i zadnja znamenka razlikuju za 4, a niz od preostale tri znamenke u sredini tvori dvoznamenkasti ili troznamenkasti broj djeljiv s 5. Ako bi Marko krenuo ispisivati sve takve brojeve, koliko bi najviše brojeva mogao ispisati da dođe do svoje lozinke? Prva znamenka lozinke nije nula.

6. Prirodan broj n ima ukupno 6 djelitelja od kojih su točno dva prosti brojevi. Odredite broj n ako je zbroj svih njegovih djelitelja jednak 248.

7. Pravokutni trokut ABC, s katetom $|BC| = 10$ i nasuprotnim kutom $\alpha = 30°$, rotira oko pravca p koji prolazi vrhom A tako da s pravcem AB zatvara kut od $30°$ ($C \notin p$). Koliki je obujam tako nastalog rotacijskog tijela?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2018.

1. Ako u svakom članu razvoja binoma $(x-y)^n$, $n \geqslant 2$, $x, y \neq 0$, stavimo $x = 672y$, zbroj trećeg i četvrtog člana bit će jednak 0. Odredite 2018. član po redu u razvoju tog binoma.

2. Odredite $n \in \mathbb{N}$ tako da polinom $P(x) = (2x^2+1)^{n+1} - (3x+15)^{2n}$ bude djeljiv polinomom $Q(x) = x + 2$. Odredite u tom slučaju sve nultočke polinoma P koje nisu realne.

3. U pravokutniku $ABCD$, točka E dijeli stranicu $\overline{CD}$ u omjeru $1:3$ od vrha D. Ako je pravac AC okomit na pravac BE, odredite omjer duljina stranica tog pravokutnika.

4. Niz je zadan rekurzivnom formulom

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = x_n + 2n + 1,\ n \geqslant 1.$$

Odredite x_{2018}.

5. Neka su

$$A = \left\{(x,y) \mid \log(1+x^2+y^2) \leqslant 1 + \log(x+y)\right\}$$

i

$$B = \left\{(x,y) \mid \log(2+x^2+y^2) \leqslant 2 + \log(x+y)\right\}$$

skupovi točaka u ravnini. U kojem su omjeru površina skupa B i površina skupa A?

6. Odredite sve četveroznamenkaste prirodne brojeve koji su za 1949 veći od zbroja kvadrata svojih znamenaka.

7. U pravokutnom trokutu ABC duljina hipotenuze $\overline{AB}$ jednaka je c, a pri vrhu A je veći šiljasti kut mjere α. Okomica na hipotenuzu u točki A siječe pravac BC u točki D. Okomica u točki D, na prethodno povučenu okomicu AD, siječe pravac AC u točki E. U dobivenoj točki E opet povučemo okomicu na prethodnu okomicu DE, a njeno sjecište s pravcem DC označimo s F. Nastavimo li opisanim postupkom povlačiti „okomicu na okomicu” dobit ćemo niz dužina $\overline{AD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, ... Odredite zbroj njihovih duljina.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.