

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE  
Poreč, 12. - 14. travnja 2018.

6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I Taj POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1. Prvi način:**

Izračunajmo Gaussovom dosjetkom zbroj u brojniku prvog razlomka:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2018 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 1009) = 2 \cdot \frac{1010 \cdot 1009}{2} = 1010 \cdot 1009.$$

Koristeći ovaj prethodni račun možemo izračunati zbroj u nazivniku prvog razlomka:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + 2017 &= (1 + 2 + 3 + \dots + 2018) - (2 + 4 + 6 + \dots + 2018) = \frac{2018 \cdot 2019}{2} - 1010 \cdot 1009 = \\ &= 1009 \cdot 2019 - 1009 \cdot 1010 = 1009 \cdot (2019 - 1010) = 1009 \cdot 1009. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobit ćemo:

$$\frac{1010 \cdot 1009}{1009 \cdot 1009} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2018}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1010}{1009} - \frac{1}{2018}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2020 - 1}{2018}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2019}{2018}$$

$$x = \frac{2018}{2019}$$

**Drugi način:**

Izračunajmo Gaussovom dosjetkom zbroj u brojniku prvog razlomka.

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2018 = \frac{2020 \cdot 1009}{2} = 1010 \cdot 1009.$$

Isto tako, Gaussovom dosjetkom izračunajmo zbroj u nazivniku prvog razlomka.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2017 = \frac{2018 \cdot 1009}{2} = 1009 \cdot 1009.$$

Dalje je sve isto kao u prvom načinu rješavanja.

**2. a)** Od navedenih godina sve su imale 365 dana osim 2004. godine koja je imala 366 dana.

To je ukupno  $365 \cdot 4 + 366 = 1460 + 366 = 1826$  dana.

Imamo 2018 natjecatelja i 1826 mogućih datuma rođenja što znači da je barem dvoje učenika rođeno istog dana, mjeseca i godine.

**b)** U jednoj godini postoji (najviše) 366 mogućih datuma rođenja. Stoga prema danu i mjesecu rođenja natjecatelje možemo razvrstati u 366 grupa.

Kako je  $2018 = 5 \cdot 366 + 188$ , postoji barem jedna grupa u kojoj je najmanje 6 natjecatelja.

**(Obrazloženje:** U najgorem slučaju, ako u svakoj od 366 grupa ima po 5 natjecatelja, bilo koji od preostalih 188 natjecatelja je rođen istog dana i mjeseca kao i netko iz tih 366 grupa.)

3. Označimo s  $p$  broj kuglica plave boje u kutiji, a s  $c$  broj kuglica crvene boje u kutiji.

Prema uvjetu zadatka vrijedi:

$$\frac{1}{4}(p + c - 3) = c - 3,$$

$$\text{i} \quad \frac{1}{3}(p + c - 7) = c.$$

Množenjem prve jednadžbe s 4 i druge s 3 dobivamo sustav:

$$p + c - 3 = 4c - 12,$$

$$p + c - 7 = 3c.$$

Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobivamo:

$$4 = c - 12,$$

$$\text{odnosno } c = 16.$$

$$\text{Iz prve jednadžbe slijedi } p = 3c - 9 = 3 \cdot 16 - 9 = 48 - 9 = 39.$$

$$\text{Stoga je } n = p + c = 39 + 16 = 55.$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \overline{abc} + 2 \cdot \overline{cba} &= 100a + 10b + c + 2 \cdot (100c + 10b + a) = \\ &= 100a + 10b + c + 200c + 20b + 2a = 102a + 30b + 201c. \end{aligned}$$

Kako je  $102 = 17 \cdot 6$ ,  $102a$  je djeljivo sa 17, pa mora biti i  $30b + 201c$  djeljivo sa 17.

$$30b + 201c = 34b - 4b + 204c - 3c = 34b + 204c - 4b - 3c = 17(2b + 12c) - (4b + 3c).$$

Kako je  $17 \cdot (2b + 12c)$  djeljivo sa 17, mora biti i  $4b + 3c$  djeljivo sa 17.

Vrijedi  $0 < 4b + 3c \leq 63$  jer su  $b$  i  $c$  znamenke,  $c \neq 0$ , pa je najveća moguća vrijednost izraza jednaka  $4 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = 63$ .

Stoga imamo 3 moguća slučaja:

1. slučaj:

$$4b + 3c = 17$$

Jedino rješenje ovog slučaja je  $b = 2$  i  $c = 3$ , pa su traženi brojevi ( $a$  može biti bilo koja znamenka osim nule):

123, 223, 323, 423, 523, 623, 723, 823 i 923.

2. slučaj:

$$4b + 3c = 34$$

Dva su rješenja:  $b = 4$  i  $c = 6$  ili  $b = 7$  i  $c = 2$ , pa su traženi brojevi ( $a$  može biti bilo koja znamenka osim nule):

146, 246, 346, 446, 546, 646, 746, 846 i 946, odnosno 172, 272, 372, 472, 572, 672, 772, 872 i 972.

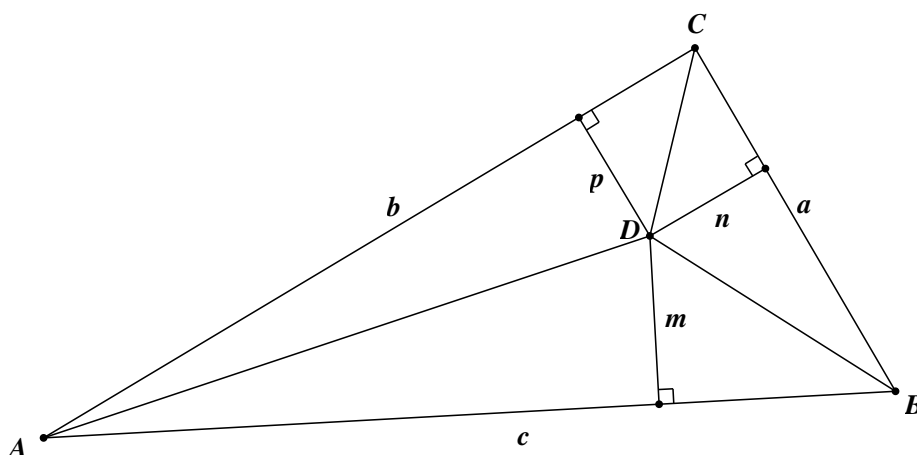
3. slučaj:

$$4b + 3c = 51$$

Dva su rješenja:  $b = 6$  i  $c = 9$  ili  $b = 9$  i  $c = 5$ , pa su traženi brojevi ( $a$  može biti bilo koja znamenka osim nule):

169, 269, 369, 469, 569, 669, 769, 869 i 969, odnosno 195, 295, 395, 495, 595, 695, 795, 895 i 995.

5. U trokutu  $\triangle ABC$  označimo točku  $D$  i dužine  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BD}$  i  $\overline{CD}$ .



Duljina visine trokuta  $\triangle ABD$  na  $\overline{AB}$  je  $m$ ,

duljina visine trokuta  $\triangle BCD$  na  $\overline{BC}$  je  $n$ , a

duljina visine trokuta  $\triangle ACD$  na  $\overline{AC}$  je  $p$ , pa je:

$$P_{\triangle ABD} = \frac{cm}{2}, \quad P_{\triangle BCD} = \frac{an}{2} \quad \text{i} \quad P_{\triangle ACD} = \frac{bp}{2}.$$

Dalje možemo na dva načina:

**Prvi način:**

Kako je  $P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD} + P_{\triangle ACD} = P_{\triangle ABC}$ , vrijedi:  $\frac{cm}{2} + \frac{an}{2} + \frac{bp}{2} = \frac{cv_c}{2}$ , odnosno

$$cm + an + bp = cv_c.$$

Podijelimo li dobivenu jednakost s  $cv_c$  dobit ćemo:  $\frac{cm}{cv_c} + \frac{an}{cv_c} + \frac{bp}{cv_c} = 1$ , odnosno

$$\frac{m}{v_c} + \frac{an}{cv_c} + \frac{bp}{cv_c} = 1.$$

Kako je  $P_{\triangle ABC} = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}$ , vrijedi:  $av_a = bv_b = cv_c$ .

Sada je  $\frac{m}{v_c} + \frac{an}{av_a} + \frac{bp}{bv_b} = 1$ , odnosno  $\frac{m}{v_c} + \frac{n}{v_a} + \frac{p}{v_b} = 1$ .

**Drugi način:**

Kako je  $P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD} + P_{\triangle ACD} = P_{\triangle ABC}$ , vrijedi  $\frac{cm}{2} + \frac{an}{2} + \frac{bp}{2} = P_{\triangle ABC}$ ,

$$\text{odnosno } c \cdot \frac{m}{2} + a \cdot \frac{n}{2} + b \cdot \frac{p}{2} = P_{\triangle ABC}.$$

Neka je  $P = P_{\triangle ABC}$ .

Iz  $P = \frac{av_a}{2}$  slijedi da je  $a = \frac{2P}{v_a}$ ,

iz  $P = \frac{bv_b}{2}$  slijedi da je  $b = \frac{2P}{v_b}$ ,

iz  $P = \frac{cv_c}{2}$  slijedi da je  $c = \frac{2P}{v_c}$ .

Izraze za  $a$ ,  $b$  i  $c$  uvrstimo u  $c \cdot \frac{m}{2} + a \cdot \frac{n}{2} + b \cdot \frac{p}{2} = P$ :

$$\frac{2P}{v_c} \cdot \frac{m}{2} + \frac{2P}{v_a} \cdot \frac{n}{2} + \frac{2P}{v_b} \cdot \frac{p}{2} = P,$$

odnosno

$$\frac{P}{v_c} \cdot \frac{m}{1} + \frac{P}{v_a} \cdot \frac{n}{1} + \frac{P}{v_b} \cdot \frac{p}{1} = P.$$

Podijelimo li izraz s  $P$ , dobit ćemo

$$\frac{m}{v_c} + \frac{n}{v_a} + \frac{p}{v_b} = 1.$$