

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 12. - 14. travnja 2018.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN

1. Kada bi bilo koji od brojeva a, b, c bio jednak 0, onda bi i preostali brojevi morali biti jednaki nuli, dakle $(0, 0, 0)$ je jedna uređena trojka.

Kada bi brojevi a, b, c bili različiti od nule, tada $ab = c$ i $ac = b \Rightarrow a(ab) = b \Rightarrow a^2b = b$.

Podijelivši dobiveni izraz s $b \neq 0$ slijedi $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$.

Promotrimo dva slučaja:

1.) $a = 1 \Rightarrow b = c$ i $bc = 1$ pa su rješenja uređene trojke $(1, 1, 1)$ i $(1, -1, -1)$.

2.) $a = -1 \Rightarrow b = -c$ i $bc = -1$ pa su rješenja uređene trojke $(-1, 1, -1)$ i $(-1, -1, 1)$.

Ukupno ima 5 uređenih trojki realnih brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

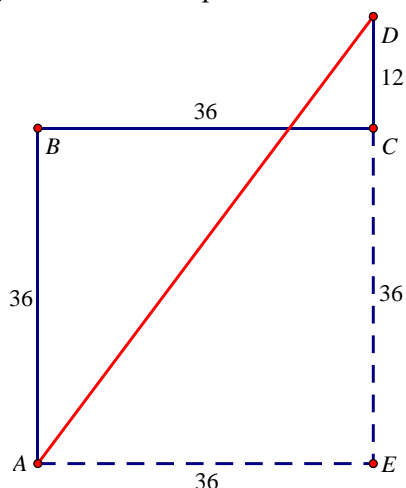
2. Brod je prvo plovio sat vremena brzinom od 36 km/h, dakle prešao je 36 km prema sjeveru. Prema istoku je prešao također 36 km, brzinom od 72 km/h.

Za to mu je trebalo dvostruko manje vremena, dakle 0.5 sata.

Brzinom 72 km/h plovio je ponovno prema sjeveru i to 10 minuta ili $\frac{1}{6}$ sata.

U trećoj etapi prešao je $72 : 6 \text{ km} = 12 \text{ km}$.

Putanja broda može se prikazati skicom:



Udaljenost od luke (točka A) do cilja (točka D) može se izračunati iz pravokutnog trokuta AED s katetama 36 i 48, primjenom Pitagorinog poučka, tj. brod je od luke udaljen 60 km.

Prosječnu brzinu izračunat ćemo tako da ukupnu duljinu puta koju je brod prešao podijelimo s vremenom plovidbe. Prvih 36 km prešao je za 1 h, drugih 36 km za pola sata, a posljednjih 12 km za 10 minuta.

Dakle, brod je ukupno prešao 84 km, a za to mu je trebalo $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$ sata.

Prosječna brzina je $84 : \frac{5}{3} \text{ km/h} = \frac{252}{5} \text{ km/h} = 50.4 \text{ km/h}$.

3. Najprije odredimo najmanji prirodan broj k_1 takav da vrijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih k_1 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 5.

Analizirajmo ostatke kvadrata prirodnih brojeva pri dijeljenju brojem 5. Neka je l prirodan broj i $n = 5l$. Tada je:

$$n^2 = 25l^2 = 5 \cdot 5l^2,$$

$$(n+1)^2 = (5l+1)^2 = 25l^2 + 10l + 1 = 5(5l^2 + 2l) + 1,$$

$$(n+2)^2 = (5l+2)^2 = 25l^2 + 20l + 4 = 5(5l^2 + 4l) + 4,$$

$$(n+3)^2 = (5l+3)^2 = 25l^2 + 30l + 9 = 5(5l^2 + 6l + 1) + 4,$$

$$(n+4)^2 = (5l+4)^2 = 25l^2 + 40l + 16 = 5(5l^2 + 8l + 3) + 1.$$

Iz gore navedenog slijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih 5 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 5. (1)

S obzirom da su ostaci kvadrata prirodnog broja pri dijeljenju brojem 5 redom 1, 4, 4, 1, 0, itd., najmanji prirodan broj k_1 takav da vrijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih k_1 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 5 je upravo $k_1 = 5$. (Očito je $k_1 \neq 1$, jer možemo uzeti broj koji nije djeljiv brojem 5, $k_1 \neq 2$, jer možemo npr. uzeti dva susjedna od kojih je jedan djeljiv brojem 5, $k_1 \neq 3$, jer možemo uzeti brojeve koji daju ostatke 1, 4 i 4 pri dijeljenju brojem 5, $k_1 \neq 4$, jer možemo uzeti četiri uzastopna broja među kojima je i onaj djeljiv brojem 5.)

Odavde slijedi i da je zbroj kvadrata uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 5 ako i samo ako tih brojeva ima $5i$, gdje je i prirodan broj.

Odredimo sada najmanji prirodan broj k_2 takav da vrijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih k_2 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 3. Najprije, neka je $m = 3l$, gdje je l prirodan broj. Tada je:

$$m^2 = 9l^2 = 3 \cdot 3l^2,$$

$$(m+1)^2 = (3l+1)^2 = 9l^2 + 6l + 1 = 3(3l^2 + 2l) + 1,$$

$$(m+2)^2 = (3l+2)^2 = 9l^2 + 12l + 4 = 3(3l^2 + 4l + 1) + 1.$$

S obzirom da su ostaci kvadrata prirodnog broja pri dijeljenju brojem 3 redom 1, 1, 0, 1, 1, 0, itd., zbroj tri uzastopna kvadrata daje ostatak 2 pri dijeljenju brojem 3 pa iz navedenog slijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih 9 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 3, (2)

a najmanji prirodan broj k_2 takav da vrijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih k_2 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 3 je upravo $k_2 = 9$. (Očito je $k_2 \neq 1$, jer možemo uzeti broj koji nije djeljiv brojem 3, $k_2 \neq 4$, jer možemo uzeti dva broja djeljiva brojem 3, $k_2 \neq 5$, jer možemo uzeti samo jedan broj djeljiv brojem 3, $k_2 \neq 7, 8$, jer možemo uzeti tri broja djeljiva brojem 3, a očito je $k_2 \neq 2, 3, 6$, jer ni za koja dva, tri i šest kvadrata uzastopnih brojeva zbroj nije djeljiv brojem 3.)

Odavde slijedi i da je zbroj kvadrata uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 3 ako i samo ako tih

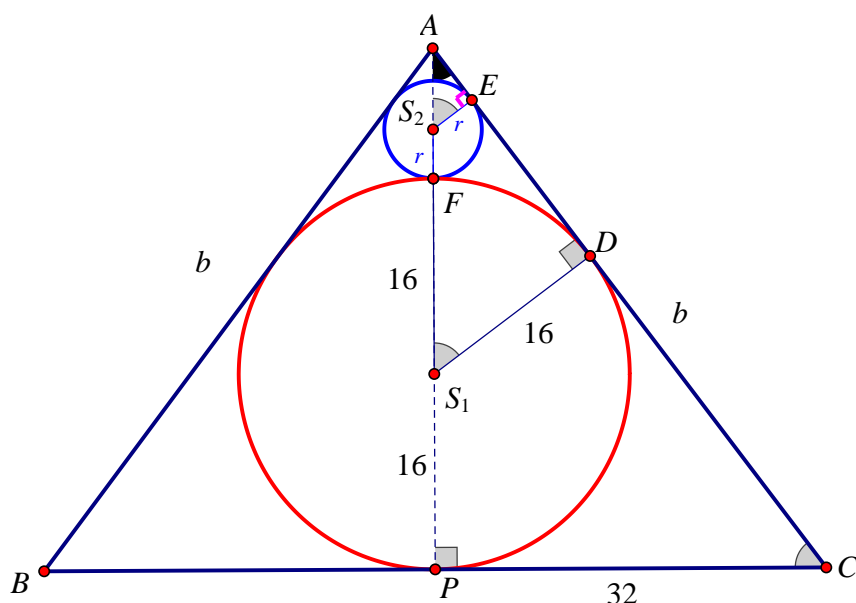
brojeva ima $9i$, gdje je i prirodan broj.

Iz (1) i (2) slijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih 45 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 15. Budući da je 45 najmanji zajednički višekratnik brojeva 5 i 9, broj $k = 45$ je i traženi minimalni broj. Naime, za bilo koji broj $m < 45$, vrijedi da nije djeljiv ili brojem 5 ili brojem 9 pa, prema gore navedenom, ne može dijeliti zbroj kvadrata prvih m prirodnih brojeva.

Primjedba: Moguće ostatke kvadrata pri dijeljenju brojem 5, odnosno brojem 3, možemo ispitati i ovako:

$$(5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10n + 1, (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 40n + 4, \text{ odnosno } (3k \pm 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1.$$

4. Prvi način:



Uz oznake kao na slici neka je $|AP| = v$.

Trokuti ΔS_1DA i ΔS_2EA su slični po KK poučku, pa vrijedi:

$$16:r = (v-16):(v-r-2 \cdot 16)$$

$$16:r = (v-16):(v-r-32)$$

$$16(v-r-32) = r(v-16)$$

$$16v - 16r - 512 = rv - 16r$$

$$16v - rv = 512$$

$$v(16-r) = 512$$

$$v = \frac{512}{16-r}$$

Trokuti ΔS_1DA i ΔCPA su slični po KK poučku, pa vrijedi:

$$32:16 = b:(v-16)$$

$$2:1 = b:(v-16)$$

$$b = 2v - 32$$

Uvrštavanjem $v = \frac{512}{16-r}$ u prethodnu jednakost dobivamo:

$$b = 2 \cdot \frac{512}{16-r} - 32$$

$$b = \frac{1024 - 32 \cdot 16 + 32r}{16-r}$$

$$b = \frac{512 + 32r}{16-r}$$

$$b = \frac{32(16+r)}{16-r}$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut $\triangle CPA$ dobivamo:

$$b^2 = v^2 + 32^2$$

$$\left[\frac{32(16+r)}{16-r} \right]^2 = \left(\frac{512}{16-r} \right)^2 + 32^2$$

$$32^2 \cdot \frac{(16+r)^2}{(16-r)^2} = \frac{512^2}{(16-r)^2} + 32^2 \quad / : 32^2$$

$$\frac{(16+r)^2}{(16-r)^2} = \frac{16^2}{(16-r)^2} + 1 \quad / \cdot (16-r)^2$$

$$(16+r)^2 = 256 + (16-r)^2$$

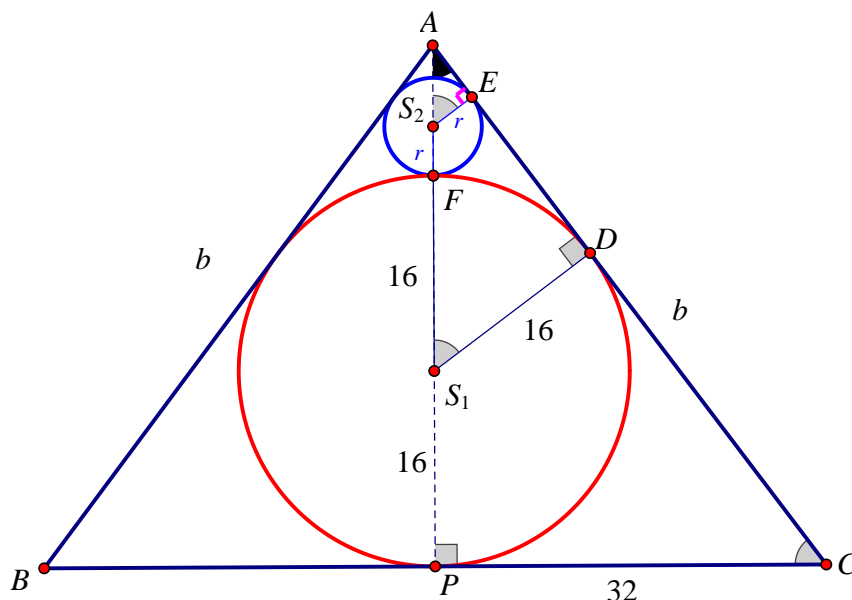
$$256 + 32r + r^2 = 256 + 256 - 32r + r^2$$

$$64r = 256$$

$$r = 4 \text{ cm}$$

Duljina polumjera druge kružnice je 4 cm.

Drugi način:



Trokuti $\triangle S_1DA$ i $\triangle CPA$ su slični po KK poučku, pa vrijedi:

$$32:16 = b:(v-16)$$

$$2:1 = b:(v-16)$$

$$b = 2v - 32$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut $\triangle CPA$ dobivamo:

$$b^2 = v^2 + 32^2$$

Uvrštavanjem se dobije:

$$(2v - 32)^2 = v^2 + 32^2$$

$$4v^2 - 128v + 32^2 = v^2 + 32^2$$

$$3v^2 = 128v$$

$$v = \frac{128}{3}$$

Trokuti $\triangle S_1DA$ i $\triangle S_2EA$ su slični po KK poučku, pa vrijedi:

$$16:r = (v-16):(v-r-2 \cdot 16)$$

$$16:r = (v-16):(v-r-32)$$

$$16(v-r-32) = r(v-16)$$

$$16v - 16r - 512 = rv - 16r$$

$$16v - rv = 512$$

$$v(16-r) = 512$$

$$v = \frac{512}{16-r}$$

Izjednačavanjem se dobije:

$$\frac{512}{16-r} = \frac{128}{3}$$

$$128 \cdot (16-r) = 512 \cdot 3$$

$$16-r = 12$$

$$r = 4$$

Duljina polumjera manje kružnice je 4 cm.

5. Od starta do cilja potrebno je 10 pomaka, od kojih je 7 pomaka desno i 3 gore. Ako se sa D označi pomak za jedan udesno, a sa G pomak za jedan prema gore, put od starta do cilja može se napisati kao uređena desetorka u kojoj je 7 D-ova i 3 G-a. Pitanje je koliko ima različitih desetorki s tim svojstvom.

Prvi način prebrojavanja:

Položaj prvog G može se izabrati na 10 načina, drugog G na preostalim 9 i trećeg G na preostalim 8 načina. To je ukupno $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ načina. Međutim, kako nije važno koji je G izabran prvi, koji drugi, a koji treći, taj broj 720 treba podijeliti sa 6 jer je svaka moguća trojka ubrojena 6 puta ($3 \cdot 2 \cdot 1$).

Dakle, do cilja je ukupno 120 puteva.

Drugi način prebrojavanja:

Deset različitih slova možemo poredati na $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ načina. S obzirom da, u našem primjeru imamo deset slova od kojih je 7 D-ova i 3 G-a, svaka permutacija tih sedam istih slova D (kojih ima $7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$) i tri ista slova G (kojih ima $3 \cdot 2 \cdot 1$) daje istu uređenu desetorku slova u kojoj je

sedam slova D i tri slova G. Zato je ukupni broj putova jednak $\frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$.