

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE  
Poreč, 12. - 14. travnja 2018.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1. Prvi način:** Polazna jednačba ekvivalentna je redom s:

$$\begin{aligned}4mn - 10m + 6n &= 260 \\4mn - 10m + 6n - 15 &= 245 \\2m(2n - 5) + 3(2n - 5) &= 245 \\(2m + 3)(2n - 5) &= 245\end{aligned}$$

Rastav broja 245 na proste faktore je  $245 = 5 \cdot 7^2$ .

Djelitelji broja 245 su: 1, 5, 7, 35, 49 i 245.

S obzirom da je  $2m + 3 \geq 5$ , prvi je slučaj nemoguć.

Preostaju sljedeće mogućnosti:

- (i)  $2m + 3 = 5$ ,  $2n - 5 = 49$ , odnosno  $m = 1$  i  $n = 27$ ;
- (ii)  $2m + 3 = 7$ ,  $2n - 5 = 35$ , odnosno  $m = 2$  i  $n = 20$ ;
- (iii)  $2m + 3 = 35$ ,  $2n - 5 = 7$ , odnosno  $m = 16$  i  $n = 6$ ;
- (iv)  $2m + 3 = 49$ ,  $2n - 5 = 5$ , odnosno  $m = 23$  i  $n = 5$ ;
- (v)  $2m + 3 = 245$ ,  $2n - 5 = 1$ , odnosno  $m = 121$  i  $n = 3$ .

Rješenja su uređeni parovi (1, 27), (2, 20), (16, 6), (23, 5) i (121, 3).

**Drugi način:** Polazna jednačba transformira se na sljedeći način:

$$\begin{aligned}2mn - 5m + 3n &= 130 \\2mn + 3n &= 5m + 130 \\n(2m + 3) &= 5m + 130 \\n &= \frac{5m + 130}{2m + 3}\end{aligned}$$

Ako je  $n$  prirodni broj, onda je i njegov dvokratnik  $2n$  također prirodni broj.

Dalje vrijedi:

$$2n = \frac{10m + 260}{2m + 3} = \frac{10m + 15 + 245}{2m + 3} = \frac{5(2m + 3) + 245}{2m + 3} = 5 + \frac{245}{2m + 3}$$

Izraz  $2m + 3$  mora biti djelitelj broja 245.

Iz rastava  $245 = 5 \cdot 7 \cdot 7$ , zaključit ćemo da su djelitelji broja 245 brojevi 1, 5, 7, 35, 49 i 245.

Mogućnosti su:

- $2m + 3 = 1$ , pa je  $m = -1$  što nije prirodan broj,
- $2m + 3 = 5$ , pa je  $m = 1$  i  $n = 27$ ,
- $2m + 3 = 7$ , pa je  $m = 2$  i  $n = 20$ ,
- $2m + 3 = 35$ , pa je  $m = 16$  i  $n = 6$ ,
- $2m + 3 = 49$ , pa je  $m = 23$  i  $n = 5$ ,
- $2m + 3 = 245$ , pa je  $m = 121$  i  $n = 3$ .

Rješenja su uređeni parovi (1, 27), (2, 20), (16, 6), (23, 5) i (121, 3).

**2. Prvi način:** Članovi niza su:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2, \\
a_2 &= 2, \\
a_3 &= a_1 - a_2 = 2 - 2 = 0, \\
a_4 &= a_2 + a_3 = 2 + 0 = 2, \\
a_5 &= a_3 - a_4 = 0 - 2 = -2, \\
a_6 &= a_4 + a_5 = 2 + (-2) = 0, \\
a_7 &= a_5 - a_6 = -2 - 0 = -2, \\
a_8 &= a_6 + a_7 = 0 + (-2) = -2, \\
a_9 &= a_7 - a_8 = -2 - (-2) = 0, \\
a_{10} &= a_8 + a_9 = -2 + 0 = -2, \\
a_{11} &= a_9 - a_{10} = 0 - (-2) = 2, \\
a_{12} &= a_{10} + a_{11} = -2 + 2 = 0, \\
a_{13} &= a_{11} - a_{12} = 2 - 0 = 2, \\
a_{14} &= a_{12} + a_{13} = 0 + 2 = 2, \dots
\end{aligned}$$

Članovi niza ciklički se ponavljaju: 2, 2, 0, 2, -2, 0, -2, -2, 0, -2, 2, 0,  
pa opet 2, 2, 0, 2, -2, 0, -2, -2, 0, -2, 2, 0, itd.

U podnizu koji se ponavlja ima 12 članova i njihov je zbroj 0.

Iz  $100 = 12 \cdot 8 + 4$  se vidi da u prvih 100 članova zadanog niza ima 8 takvih podnizova  
te se još ponavljaju prva četiri člana niza.

Zbroj prvih 100 članova zadanog niza je  $8 \cdot 0 + 2 + 2 + 0 + 2 = 6$ .

**Drugi način:** Rješenje se može dobiti tako da se svaki član niza izrazi pomoću prva dva člana  $a_1$  i  $a_2$ .

Iz  $a_1$  i  $a_2$  dobiva se redom:

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_1 - a_2 \\
a_4 &= a_2 + a_3 = a_2 + a_1 - a_2 = a_1 \\
a_5 &= a_3 - a_4 = a_1 - a_2 - a_1 = -a_2 \\
a_6 &= a_4 + a_5 = a_1 + (-a_2) = a_1 - a_2 \\
a_7 &= a_5 - a_6 = -a_2 - a_1 + a_2 = -a_1 \\
a_8 &= a_6 + a_7 = a_1 - a_2 - a_1 = -a_2 \\
a_9 &= a_7 - a_8 = -a_1 + a_2 \\
a_{10} &= a_8 + a_9 = -a_2 - a_1 + a_2 = -a_1 \\
a_{11} &= a_9 - a_{10} = -a_1 + a_2 + a_1 = a_2 \\
a_{12} &= a_{10} + a_{11} = -a_1 + a_2 \\
a_{13} &= a_{11} - a_{12} = a_2 + a_1 - a_2 = a_1 \\
a_{14} &= a_{12} + a_{13} = -a_1 + a_2 + a_1 = a_2 \dots
\end{aligned}$$

Zbog  $a_{13} = a_1$  i  $a_{14} = a_2$ , ponavljaju se svi ostali članovi niza.

Zbog  $100 = 12 \cdot 8 + 4$  vrijedi:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 8 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{12}) + a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Vrijedi  $a_1 + a_2 + \dots + a_{12} = 4a_1 - 4a_1 + 4a_2 - 4a_2 = 0$  i  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3a_1$ ,  
pa je  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 8 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6$ .

**3.** Od sedam računskih zadataka biraju se tri.

Prvi se zadatak može izabrati na 7 načina, drugi na 6, a treći na 5.

To je ukupno  $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$  mogućnosti.

Budući da je važno samo koji su zadaci izabrani, a ne i njihov poredak,

broj 210 treba podijeliti s brojem različitih rasporeda triju zadataka.

Tri izabrana zadatka mogu se rasporediti na  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  načina.

Tri zadatka za računski dio zadaće mogu se izabrati na  $210 : 6 = 35$  načina.

Analogno se računa i broj mogućih odabira dvaju geometrijskih zadataka, od predloženih 5.

Prvi se zadatak može izabrati na 5 načina, a drugi na 4 načina.

To je ukupno  $5 \cdot 4 = 20$  mogućnosti.

I ovdje treba taj broj podijeliti s brojem različitih rasporeda dvaju zadataka, a to je 2.

Dva zadatka za geometrijski dio zadaće mogu se izabrati na  $20 : 2 = 10$  načina.

Konačno, bilo koji izbor računskih zadataka može se kombinirati s bilo kojim izborom geometrijskih zadataka, pa je ukupan broj načina na koje možemo izabrati zadatke za državno natjecanje  $35 \cdot 10 = 350$  načina.

**4.** Označimo sa  $x$ ,  $x < 1$ , dio posude koji je ispunjen 85-postotnim alkoholom.

Broj postotaka alkohola u posudi iznosi  $85x$ .

Neispunjeni dio posude iznosi  $1 - x$  i toliko će biti dodano 21-postotnog alkohola.

Njegov udio u posudi iznosi  $21(1 - x) \%$ .

Broj postotaka alkohola u posudi sada je  $21(1 - x) + 85x = 21 + 64x$ .

Ponovo se odlije  $1 - x$  smjese te se količina alkohola smanjila za  $(1 - x)(21 + 64x)$ .

Drugim dolijevanjem 21-postotnog alkohola količina alkohola se povećala za  $21(1 - x)$ .

Na kraju je dobivena 70-postotna otopina alkohola, pa vrijedi:

$$21 + 64x - (1 - x)(21 + 64x) + 21(1 - x) = 70$$

Množenjem i pojednostavljivanjem dobivamo jednadžbu:

$$64 \cdot x \cdot x = 49$$

$$x \cdot x = \frac{49}{64}$$

$$x \cdot x = \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8}$$

$$x = \frac{7}{8}$$

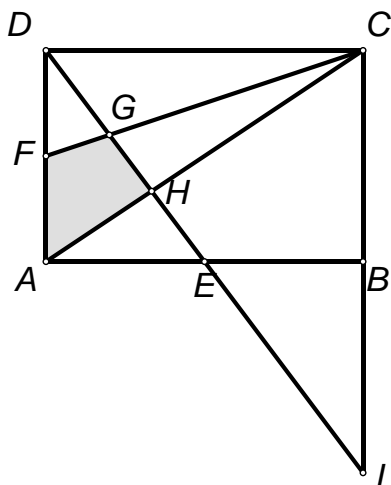
Prije dolijevanja bilo je napunjeno  $\frac{7}{8}$  posude.

**5.** Kutovi  $\angle EAH$  i  $\angle DCH$ , odnosno  $\angle AEH$  i  $\angle CDH$ , su parovi šiljastih kutova uz presječnice usporednih pravaca pa su ti parovi kutova jednakih veličina.

Onda su, prema KK poučku, trokuti  $AEH$  i  $CDH$  slični.

$$\text{Tada je } \frac{|AH|}{|CH|} = \frac{|AE|}{|CD|} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Zato je } |AH| = \frac{|HC|}{2} = \frac{|AC|}{3}, \text{ odnosno } p_{AHD} = \frac{1}{3} p_{ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 1.$$



Neka je  $L$  presjek pravaca  $DE$  i  $CB$ .

Vrijedi  $|\angle AED| = |\angle BEL|$  (vršni kutovi) i  $|\angle EAD| = |\angle EBL| = 90^\circ$ .

Također je  $|AE| = |BE|$  (točka  $E$  je polovište stranice  $\overline{AB}$ ).

Stoga su trokuti  $ADE$  i  $BLE$  sukladni po KSK poučku.

Onda je  $|BL| = |AD| = 2$  pa je  $|CL| = |CB| + |BL| = 4$ .

Kutovi  $\angle FDG$  i  $\angle CLG$ , odnosno  $\angle GFD$  i  $\angle GCL$  su parovi šiljastih kutova uz presječnice usporednih pravaca pa su ti parovi kutova jednakih veličina.

Onda su, prema KK poučku, trokuti  $DFG$  i  $LCG$  slični.

Tada je  $\frac{|FG|}{|CG|} = \frac{|DF|}{|LC|} = \frac{1}{4}$ .

Zato je  $|FG| = \frac{|CG|}{4} = \frac{|CF|}{5}$ , odnosno  $p_{DFG} = \frac{1}{5} p_{DFC} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{10}$ .

Konačno,  $p_{AHGF} = p_{AHD} - p_{DFG} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ .